Juegos Dinámicos de Información Imperfecta[1]

Alvaro J. Riascos Villegas
Universidad de los Andes y Quantil

Marzo de 2025

[1]Basado en Riascos, A. 2024. Juegos Estratégicos y sus Aplicaciones.
www.alvaroriascos.com

Contenido

1. Modelo
2. Amenazas no creíbles
3. Racionalidad Secuencial
4. Aprendizaje
5. Creencias no creíbles

Contenido

1. Modelo
2. Amenazas no creíbles
3. Racionalidad Secuencial
4. Aprendizaje
5. Creencias no creíbles

Modelo

- En muchas circunstancias de interacción estratégica, los agentes no pueden observar lo que han jugado sus adversarios en el pasado. Esto motiva el siguiente modelo.

Definition

Un juego en forma extensiva de información (perfecta o imperfecta) es una estructura de la forma:

$$\Gamma = (N, K, R, Z, \{K_i\}_{i=1,\ldots,n}, \{H_i\}_{i=1,\ldots,n}, \{A(k)\}_{k\in K\setminus Z}, \{u_i\}_{i=1,\ldots,n})$$

donde:

- Para $i = 1, \ldots, n$; H_i es una partición de K_i. Cada $h \in H_i$ denota un conjunto de información. Las particiones H_i son la estructura de información de lo agentes en el juego.
- Para $i = 1, \ldots, n$, y $k \in K_i$, $A(k)$ denota las acciones posibles del jugador i en el nodo k. Denotamos un elemento de $a \in A(k)$ por a_k. Dados k y $k' \in h \in H_i$ debe complirse que $A(k) = A(k')$. Abusando un poco del lenguaje definimos $A(h) = A(k)$, $k \in h$ y denotamos una acción $a \in A(h)$ por a_h.

Modelo: Estrategia

Definition

Sea $A_i = \bigcup_{h \in H_i} A(h)$. Una estrategia pura s_i para el jugador $i = 1, ..., n$ en un juego en forma extensiva Γ es una función $s_i : H_i \longrightarrow A_i$ tal que para todo $h \in H_i$, $s_i(h) \in A(h)$.

Modelo: Forma Normal

Definition (Forma normal)

Para $i = 1, ..., n$; sea $S_i = \{s_i : H_i \longrightarrow A_i \mid s_i(h) \in A(h)\}$, $s \in S = \prod_{i=0}^{N} S_i$ y definimos $\zeta(s) \in Z$ como el nodo final correspondiente al único camino que sobre el árbol define la estrategia conjunta s. Para $i = 1, ..., N$ definimos $\pi_i(s_1, ..., s_N) = u_i(\zeta(s_1, ..., s_N))$. El juego $G = (\{1, ..., N\}, \{S_i\}_{i=1,...,N}, \{\pi_i\}_{i=1,...,N})$ se llama la representación normal del juego en forma extensiva.

Modelo: Estrategias mixtas y de comportamiento

Definition (Estrategias mixtas y de comportamiento)

Una estrategia mixta en un juego en forma extensiva es una estrategia mixta del juego en su representación normal. Una estrategia de comportamiento en un juego en forma extensiva es una estrategia mixta del juego en su representación multiagente. Alternativamente, una estrategia de comportamiento para el jugador i es una función $\gamma_i : H_i \to \Delta(A_i)$ tal que para todo $h \in H_i$ el soporte de $\gamma_i(h)$ está contenido en $A(h)$.

Modelo: Memoria Perfecta

- Las estrategias mixtas y de comportamiento son estratégicamente equivalentes en juegos con memoria perfecta.
- Esto es, juegos en los que ningún jugador olvida sus acciones o información adquirida en el pasado.
- El teorema que establece la equivalencia estratégica entre estrategias mixtas y de comportamiento en juegos de memoria perfecta se debe a Kuhn (1953).

Contenido

1 Modelo

2 Amenazas no creíbles

3 Racionalidad Secuencial

4 Aprendizaje

5 Creencias no creíbles

Equilibrio Perfecto en Subjuegos

- El concepto de estrategia de inducción hacia atrás no se generaliza de forma inmediata al caso de juegos de información imperfecta.
- La generalización requiere la introducción del concepto de subjuego.

Definition (Subjuegos)

Un subjuego de un juego en forma extensiva es un juego tal que: (1) Comienza con un nodo que define un conjunto de información que es un singleton. (2) Contiene todos los nodos sucesores y solo estos. (3) Si un nodo está en el subjuego entonces todo nodo en su conjunto de información también está (es decir, no hay conjuntos de información divididos por el subjuego).

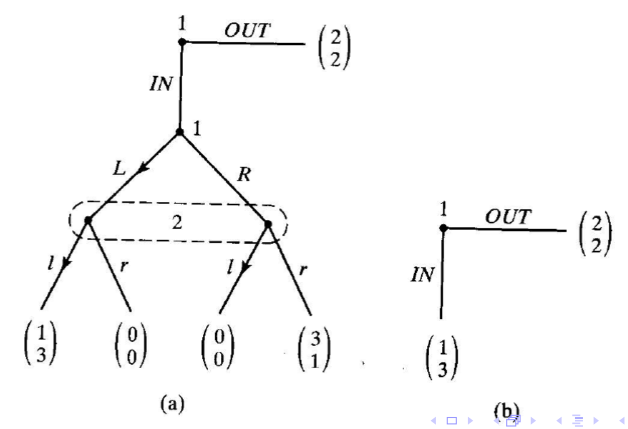
Equilibrio Perfecto en Subjuegos

Definition (Equilibrio perfecto en subjuegos)

Una estrategia conjunta s es un equilibrio perfecto en subjuegos si *induce* un equilibrio de Nash - Cournot de todo subjuego.

Example

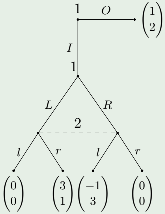
En este juego existen dos equilibrios de Nash en el único subjuego (propio): (L, l) y (R, r) y dos en subjuegos: $((O, L), l)$ y $((I, R), r)$. Obsérvese que $((O, R), l)$ es un equilibrio de Nash pero no es un equilibrio perfecto en subjuegos (i.e., no es creíble).



Equilibrio Perfecto en Subjuegos

Example

En el siguiente juego vemos como el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos selecciona un único equilibrio de Nash de tres equilibrios de Nash que existen. Obsérvese que uno de los equilibrios eliminados no es creíble (i.e, (O,R,I)) y el otro es dominado (i.e., (O,L,I)).



Equilibrio Perfecto en Subjuegos

Theorem

En un juego información perfecta, el conjunto de estrategias de inducción hacias atrás coincide con los equilibrio perfectos en subjuegos.

Theorem (Selten)

Todo juego finito en forma extensiva de memoria perfecta tiene un equilibrio perfecto en subjuegos (posiblemente en estrategias de comportamiento).

Equilibrio Perfecto en Subjuegos No Creible

Example

El siguiente juego no tiene subjuegos propios. Los equilibrios de Nash (A, b) y (B, a) son equilibrios perfectos en subjuegos. Sin embargo el primero no es creíble. En particular, no es creíble que el segundo jugador jugará b en caso de tener que jugar (no es secuencialmente racional).

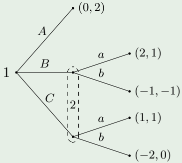


Figura 6.1: C

Este concepto no impone ninguna restricción sobre los caminos que no definen un subjuego.

Contenido

1. Modelo
2. Amenazas no creíbles
3. Racionalidad Secuencial
4. Aprendizaje
5. Creencias no creíbles

Racionalidad Secuencial

La necesidad de introducir un sistema de expectativas como parte integral de la evaluación que de un juego lo ilustra el juego: (A, b) es un equilibrio de Nash pero que este sea o no sea creíble depende de con qué probabilidad cree el jugador que, en caso de que le toque jugar, estará haciéndolo en uno u otro nodo.

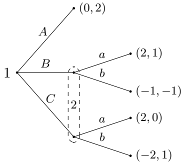


Figura 6.3: C1

Racionalidad Secuencial

- Definamos el conjunto de todas las expectativas del agente i como $\Delta_i = \bigcup_{h \in H_i} \Delta(h)$ donde $\Delta(h)$ denota el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre el conjunto de información h.

Definition (Sistema de expectativas)

Un sistema de expectativas de un juego es un conjunto funciones $\{p_i\}_{i=1,\dots N}$, $p_i : H_i \to \Delta_i$ tal que $p_i(h) \in \Delta(h)$.

- La interpretación es: $p_i(h)$ es la expectativa que tiene el jugador i de estar en cada uno de los nodos de su conjunto de información h.

Racionalidad Secuencial

Definition (Estimación)

Una estimación del juego es $\left(\{p_i\}_{i=1,\dots N}, \{b_i\}_{i=1,\dots N}\right)$ donde $(p_i)_{i=1,\dots N}$ es un sistema de expectativas y $(b_i)_{i=1,\dots N}$ son estrategias de comportamiento.

Racionalidad Secuencial

- Dada una estimación existe una forma natural de definir si las estrategias de comportamiento son óptimas dadas las expectativas de los jugadores (i.e., secuencialmente racionales).
- Fijemos una estimación del juego: $\left(\{p_i\}_{i=1,\ldots N}, \{b_i\}_{i=1,\ldots N}\right)$.
- Sea k un nodo cualquiera, $k \in K_i$; definimos $u_i\left(b \mid k\right)$ como la utilidad del jugador i cuando suponemos que éste se encuentra en este nodo y las estrategias de comportamiento utilizadas por los jugadores son $\{b_i\}_{i=1,\ldots N}$.
- Obsérvese que esta utilidad la podemos interpretar como una función: $u_i\left(b \mid \cdot\right) : K_i \rightarrow R$.
- Definimos la utilidad del jugador i en el conjunto de información $h \in H_i$ cuando el perfil de estrategias de comportamiento es $\{b_i\}_{i=1,\ldots N}$ y las expectativas del jugador son $p_i\left(h\right) \in \Delta_i(h)$ como:

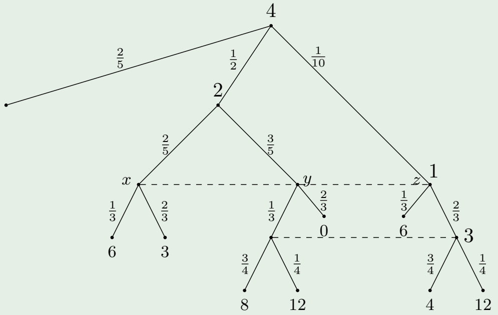
$$v_i(b \mid h) = E_{p_i(h)}\left[u_i\left(b \mid \cdot\right)\right].$$

Racionalidad Secuencial

Example

Calculemos $v_1(b \shortmid I)$ para el siguiente juego (jugador 1, conjunto de información I como aparece en la figura): Analizamos separadamente los 3 subjuegos con raíz x, y y z (dejando de lado el hecho de que están en el mismo conjunto de información I). Es fácil ver que $u_1\,(b \shortmid x) = 4$, $u_1\,(b \shortmid y) = 3$ y $u_1\,(b \shortmid z) = 6$. Supongamos que las expectativas del jugador 1 son $p_x = \frac{1}{2}, p_y = \frac{1}{3}, p_z = \frac{1}{6}$. Luego, dadas las expectativas del jugador 1 en I obtenemos: $v_1(b \shortmid I) = 4$.

Example



Racionalidad Secuencial

Definition (Racionalidad secuencial)

Una estimación de un juego $\left(\{p_i\}_{i=1,\ldots N}, \{b_i\}_{i=1,\ldots N}\right)$ es secuencialmente racional si para todo jugador i, conjunto de información $h \in H_i$ y estrategia de comportamiento b_i' del jugador i tenemos:

$$v_i(b_i, b_{-i} \mid h) \geq v_i((b_i', b_{-i}) \mid h).$$

- Intuitivamente, dada esa estimación del juego, ningún jugador tiene incentivos unilaterales a desviarse.
- Un equilibrio prefecto en subjuegos que no es creíble puede no ser racionalmente secuencial (véase ejemplo anterior).
- Desafortunadamente, una estimación secuencialmente racional no es necesariamente un equilibrio perfecto en subjuegos. Ni siquiera un equilibrio de Nash (e.g., cara y sello).

Contenido

1. Modelo
2. Amenazas no creíbles
3. Racionalidad Secuencial
4. Aprendizaje
5. Creencias no creíbles

Regla de Bayes

Example (Paradoja del gato)

Fromalizacion: supongamos que la primera elección fue la tercera puerta. Sean A_1, A_2 y A_3 los eventos en los cuales el gato está detrás de la puerta $1, 2$ o 3 respectivamente. Sean B_1 y B_2 los eventos en los cuales el segundo jugador abre la puerta 1 o 2 respectivamente. Nuestro objetivo es calcular $P(A_i \mid B_j)$. Entonces dada la información del problema es natural suponer:

$$P(A_i) = \frac{1}{3}, P(B_1|A_1) = P(B_2 \mid A_2) = 0$$

$$P(B_1 \mid A_2) = P(B_2 \mid A_1) = 1$$

y

$$P(B_1|A_3) = P(B_2|A_3) = \frac{1}{2}.$$

Entonces si la segunda persona abre la puerta 2 es fácil calcular, usando la regla de Bayes, $P(A_1 \mid B_2) = \frac{2}{3}$.

Consistencia con la regla de Bayes

Definition (Consistencia con regla de Bayes)

Una estimación de un juego $\left(\{p_i\}_{i=1,\ldots n}, \{b_i\}_{i=1,\ldots n}\right)$ es consistente con la regla de Bayes si, dadas las estrategias de comportamiento de todos los jugadores, la expectativa que tiene cada jugador de estar en un nodo específico es igual a la probabilidad de alcanzar ese nodo, condicional a que se alcanza el conjunto de información al que pertenece el nodo.

Obsérvese que esto no impone ninguna restricción sobre las expectativas que puede tener un jugador de estar en un nodo particular cuando la probabilidad de llegar al conjunto de información que contiene ese nodo es cero.

Equilibrio perfecto Bayesiano débil

Definition (Equilibrio perfecto Bayesiano débil)

Una estimación de un juego es un equilbrio perfecto Bayesiano si es secuencialmente racional y si la estimación es consistente con la regla de Bayes.

Equilibrio perfecto Bayesiano débil: Observaciones

- La estimación del juego de cara y sello del ejemplo anterior no es consistente con la regla de Bayes por lo tanto no es un equilibrio perfecto Bayesiano débil.
- Todo equilibrio perfecto Bayesiano débil es un equilibrio de Nash (véase Mas Colell, proposición 9.C.1 página 285).
- Un equilibrio perfecto Bayesiano débil no tiene que ser necesariamente un equilibrio perfecto en subjuegos como lo demuestra el siguiente ejemplo.

Equilibrio perfecto Bayesiano débil que no es EPS

Example (Equilibrio perfecto Bayesiano débil que no es EPS)

(B, X, D) es un equilibrio perfecto Bayesiano débil que lo sustenta la creencia del jugador 3 de estar en el nodo superior de su conjunto de información con probabilidad 0. Sin embargo, este no es un equilibrio perfecto en subjuegos.

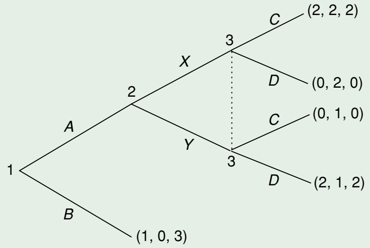


Figure 4.5: An extensive-form game with a weak perfect Bayesian equilibrium that is not subgame perfect.

Example (Equilibrio perfecto Bayesiano débil con creencias no creíbles)

Las estrategias (x, l) son un EPBD con la creencia del jugador II de estar parado en el nodo de la izquierda con probabilidad 0,9. Sin embargo, esa creencia no es creíble.

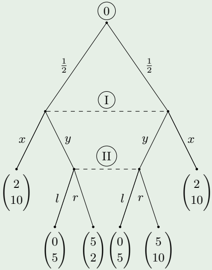


Figura 6.12: Equilibrio perfecto Bayesiano débil que no es creíble (Fuente: Ejemplo 9.C.4 de Mas Collel).

Contenido

1. Modelo
2. Amenazas no creíbles
3. Racionalidad Secuencial
4. Aprendizaje
5. Creencias no creíbles

Evaluaciones Consistentes

Definition (Evauluaciones Consistentes)

Decimos que una evaluación de un juego $\left(\{p_i\}_{i=1,\ldots n}, \{b_i\}_{i=1,\ldots n}\right)$ es consistente si existe una sucesión de estrategias de comportamiento conjuntas $\{b_i^n\}_n$ tal que:

1. Para todo n y para todo i, b_i^n es de soporte completo o completamente mixta (i.e., toda estrategia pura tiene probabilidad estrictamente positiva de ser elegida).
2. Para cada i, la sucesión $\{b_i^k\}_{k=1,\ldots}$ converge a b_i.
3. Para cada i las expectativas que induce la sucesión $\{b_i^k\}_{k=1,\ldots}$ de acuerdo a la regla de Bayes convergen a las expectativas p_i.

Equilibrio Secuencial

Definition (Equilibrio Secuencial)

Una evaluación de un juego es un equilibrio secuencial si es consistente y secuencialmente racional.

Intuitivamente, en ningún momento del juego (aún en conjuntos de información con probabilidad cero de ser visitados) un jugador tiene incentivos unilaterales a desviarse.

Equilibrio Secuencial

Theorem (Kreps y Wilson)

Todo juego en forma extensiva con memoria perfecta tiene un equilibrio secuencial (posiblemente en estrategias de comportamiento) y todo equilibrio secuencial es un equilibrio perfecto en subjuegos.

Equilibrio perfecto Bayesiano débil que es perfecto en subjuegos pero no equilibrio secuencial

Example

Equilibrio perfecto Bayesiano débil que es perfecto en subjuegos pero no equilibrio secuencial. Las estrategias (A, b, U) son un equilibrio perfecto Bayesiano débil siempre y cuando el jugador 3 crea que está en x_{31} con probabilidad superior a $\frac{2}{3}$. Este equilibrio no es creible y no es un equilibrio secuencial.

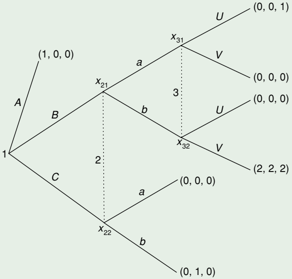


Figure 4.10: An extensive-form game with a WPBE that is not a sequential equilibrium.

Equilibrio Secuencial puede no ser creíble

Example

Equilibrio Secuencial puede no ser creíble. Las estrategias (A, b) con sistema de expectativas $p_{\text{nodo inferior}} = 1$ son un ES pero no es creíble. Considere las estrategias $b_1^k = (1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}, \frac{1}{k^2}, \frac{1}{k})$ y $b_2^k = (1 - \frac{1}{k}, \frac{1}{k})$.

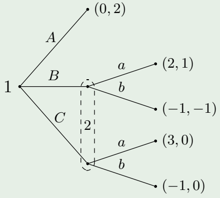


Figura 6.17: Equilibrio Secuencial que no es creíble.

Figura: Equilibrio Secuencial que no es creíble.

No es creíble por inducción hacia atrás (i.e., los individuos se van a