

Juegos Dinámicos de Información Perfecta¹

Alvaro J. Riascos Villegas
Universidad de los Andes y Quantil

Febrero 2025

¹Basado en Riascos, A. 2021. Juegos Estratégicos y sus Aplicaciones.
www.alvaroriascos.com

Contenido

- 1 Modelo
- 2 Inducción hacia atrás
- 3 Juegos Bilaterales

Contenido

- 1 Modelo
- 2 Inducción hacia atrás
- 3 Juegos Bilaterales

Modelo

Definition

Un juego en forma extensiva de información perfecta es una estructura de la forma:

$$\Gamma = (N, K, R, Z, \{K_i\}_{i=1,\dots,N}, \{A(k)\}_{k \in K \setminus Z}, \{u_i\}_{i=1,\dots,N})$$

donde:

- 1 N es un conjunto de jugadores, $N = \{1, \dots, n\}$.
- 2 K es un conjunto finito que representa los nodos de un árbol.
- 3 R es una relación sobre K que define un árbol.
- 4 Z son los nodos terminales del árbol.
- 5 $\{K_i\}_{i=1,\dots,N}$ es una partición de $K \setminus Z$ que denota los nodos donde cada jugador juega.
- 6 Para $i = 1, \dots, N$, y $k \in K_i$, $A(k)$ denota las acciones posibles del jugador i en el nodo k . Denotamos un elemento de $a \in A(k)$ por a_k .
- 7 Para $i = 1, \dots, N$, y $z \in Z$, $u_i(z)$ denota la utilidad del agente i en caso de que el resultado final del juego sea el nodo terminal z . Cuando la estructura del árbol la determina algún evento aleatorio (jugadas de la naturaleza), interpretamos estas funciones de utilidad como funciones de utilidad esperadas.

Definition

Sea $A_i = \bigcup_{k \in K_i} A(k)$. Una estrategia pura s_i para el jugador $i = 1, \dots, n$ en un juego en forma extensiva Γ es una función $s_i : K_i \rightarrow A_i$ tal que para todo $k \in K_i$, $s_i(k) \in A(k)$.

Definition (Forma normal)

Para $i = 1, \dots, n$, sea $S_i = \{s_i : K_i \longrightarrow A_i \mid s_i(k) \in A(k)\}$,
 $s \in S = \prod_{i=1}^n S_i$ y definimos $\zeta(s) \in Z$ como el nodo final correspondiente al único camino que sobre el árbol define la estrategia conjunta s .

Para $i = 1, \dots, n$ definimos $\pi_i(s_1, \dots, s_n) = u_i(\zeta(s_1, \dots, s_n))$.
El juego $G = (\{1, \dots, n\}, \{S_i\}_{i=1, \dots, n}, \{\pi_i\}_{i=1, \dots, n})$ se llama la representación normal del juego en forma extensiva.

Example (Entrada de una firma)

Considere el juego de la Figura 2A.

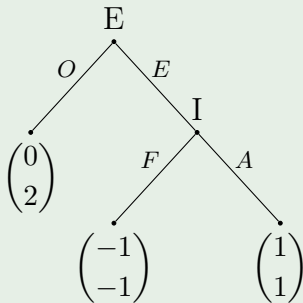


Figura 5.2:

Example

Este juego tiene como representación normal:

1\2	F	A
O	0,2	0,2
E	-1,-1	1,1

Contenido

- 1 Modelo
- 2 Inducción hacia atrás
- 3 Juegos Bilaterales

Modelo

Definition (Inducción hacia atrás)

Decimos que la estrategia conjunta $\hat{s} = (\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_N)$ es una estrategia de inducción hacia atrás en un juego de información perfecta si puede obtenerse de la siguiente forma:

- 1 Para cada nodo k tal que todo nodo sucesor de k sea terminal, si $k \in K_i$ entonces $\hat{s}_i(k)$ maximiza el pago del agente i entre las posibilidades que tiene en ese nodo.
- 2 Convierta el nodo k en un nodo terminal donde los pagos son los que determina la estrategia $\hat{s}_i(k)$.
- 3 Repita los pasos anteriores hasta llegar la raíz del árbol.

Theorem (Kuhn)

Si s es una estrategia de inducción hacia atrás en un juego de información perfecta entonces s es un equilibrio de Nash - Cournot.

Theorem (Zermelo)

Todo juego de información perfecta tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras que se puede construir mediante inducción hacia atrás. Más aún, si ningún jugador es indiferente entre dos nodos terminales (a lo largo del proceso de inducción hacia atrás), solo hay un equilibrio de Nash que es una estrategia de inducción hacia atrás.

Inducción hacia atrás

El concepto de inducción hacia atrás tiene como consecuencia resultados inesperados y altamente ineficientes. Considere el juego del cienpies de Rosenthal (1981) (Figura cienpies).

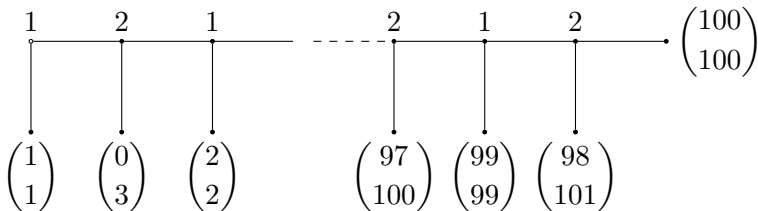


Figura 5.3: Juego del Cienpies de Rosenthal

Contenido

- 1 Modelo
- 2 Inducción hacia atrás
- 3 Juegos Bilaterales

Juegos Bilaterales

Theorem

Todo juego bilateral de información perfecta y suma cero tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras (por inducción hacia atrás) que a su vez son estrategias maxmin para cada jugador (por el teorema de von Neumann).

- Juego de ajedrez.
- Juego de Gale.