Extensión Mixta[1]

Alvaro J. Riascos Villegas
Universidad de los Andes y Quantil

Febrero 2025

[1] Basado en Riascos, A. 2023. Juegos Estratégicos y sus Aplicaciones. www.alvaroriascos.com

Contenido

Contenido

Introducción

- Una forma de enriquecer considerablemente la teoría es generalizando el concepto de estrategia.
- En ocasiones, por razones estratégicas, es nuestro proposito parecer impredecible.
- En otras ocasiones queremos coordinar.

Introducción

Definition (Estrategias mixtas)

Para el jugador i, una estrategia mixta σ_i sobre el espacio de estrategias puras es un distribución de probabilidad sobre S_i.

- Denotamos esto por $\sigma_i \in \Sigma_i$ donde Σ_i es el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre S_i y $\sigma_i(s_i)$ es la probabilidad que la estrategia σ_i le asigna a la acción $s_i \in S_i$.
- Una estrategia mixta conjunta o perfil de estrategias es un vector de $\sigma \in \Sigma = \prod_{i=1}^{N} \Sigma_i$, $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_N)$ donde $\sigma_i \in \Sigma_i$.
- En ocasiones haremos explícito el conjunto de estrategias puras sobre el cual se define la estrategias mixtas Σ_i y utilizaremos la notación, $\Sigma(S_i)$.

Introducción

- Suponemos que los jugadores escogen las estrategias mixtas de forma *estadísticamente independiente*.

Extensión Mixta

Definition (Extensión mixta de un juego en forma normal)

Sea $G = \left(N, \{S_i\}_{i=1,\dots,n}, \{\pi_i\}_{i=1,\dots,n}\right)$ un juego en forma normal. La extensión mixta del juego es el juego en forma estratégica:

$$\overline{G} = (N, \{\Sigma_i\}_{i=1,\dots,n}, \{\overline{\pi}_i\}_{i=1,\dots,n})$$

donde el pago neto de cada jugador es una extensión del pago neto π_i definido por $\overline{\pi}_i : \Sigma \to R$ donde:

$$\overline{\pi}_i(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \sum_{s_1 \in S_1, \dots, s_n \in S_n} \sigma_1(s_1) \dots \sigma_n(s_n) \pi_i(s_1, \dots, s_n)$$

- Note que el pago de los jugadores es un pago esperado.

Contenido

Dominancia

Definition (Dominancia de mixtas por mixtas)

Decimos que para el agente $i \in N$ una estrategia mixta $\sigma_i \in \Sigma_i$ es dominada (estrictamente) por una estrategia $\widehat{\sigma}_i \in \Sigma_i$ si para todo $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$:

$$\pi_i(\widehat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) > \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

Definition (Dominancia débil de mixtas por mixtas)

Decimos que para el agente $i \in N$ una estrategia mixta $\sigma_i \in \Sigma_i$ es dominada débilmente por una estrategia $\widehat{\sigma}_i \in \Sigma_i$ si para todo $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$:

$$\pi_i(\widehat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) \geq \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

Con desigualdad estricta en almenos un $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$.

Dominancia

- Si una estrategia es dominada débilmente por una estrategia pura, entonces es dominada débilmente por una estrategia mixta. El converso no es cierto:

Example

Considere el siguiente juego en forma estratégica (los pagos del jugador 2 son irrelevantes para el ejemplo).

1\2	A	B
X	1,*	1,*
Y	3,*	0,*
Z	0,*	3,*

En este juego, ninguna estrategia del jugador 1 es dominada en estrategias puras. Sin embargo, la estrategia $s_1 = X$ es dominada por la estrategia mixta $\sigma_1 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Dominancia: Ejercicio

Mostrar que la siguiente definición es equivalente a la definición dada anteriormente de dominancia estrícta de una estrategia mixta por una estrategia mixta. Para el agente $i \in \mathcal{N}$ una estrategia $\sigma_i \in \Sigma_i$ es dominada (estrictamente) por una estrategia $\widehat{\sigma}_i \in \Sigma_i$ si para todo $s_{-i} \in S_{-i}$:

$$\pi_i(\widehat{\sigma}_i, s_{-i}) > \pi_i(\sigma_i, s_{-i})$$

Esta equivalencia depende de la forma explícita como se ha definido la extensión mixta del juego.

Dominancia

- Utilizando esta nueva definición de dominancia es natural definir un nuevo concepto de eliminación iterativa de estrategias mixtas dominadas (estrictamente o débilmente) por estrategias mixtas.
- Denotamos este conjunto Σ^{∞}.

Dominancia

Example

Vamos a encontrar Σ^∞ en el siguiente juego

$1\backslash 2$	X	Y	Z
A	1,7	2,2	0,3
B	0,0	4,4	1,0
C	3,1	2,0	0,2

$$\Sigma_1^0 = \{A, B, C\} \mid \Sigma_2^0 = \{X, Y, Z\}$$

Para el jugador 1, A es dominada por una mixta $\sigma_1 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\Sigma_1^1 = \{B, C\} \mid \Sigma_2^1 = \{X, Y, Z\}$$

Para el jugador 2, dado que A es dominada, se puede dominar a X con una mixta $\sigma_2 = (0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

$$\Sigma_1^2 = \{B, C\} \mid \Sigma_2^2 = \{Y, Z\}$$

Dominancia

Example (Continuación)

Ahora en la tabla restante solo hay que hacer dominación estricta.

$$\begin{array}{c|c} \Sigma_1^3 = \{B\} & \Sigma_2^3 = \{Y, Z\} \\ \Sigma_1^4 = \{B\} & \Sigma_2^4 = \{Y\} \end{array}$$

De esta manera es posible concluir que $\Sigma^\infty = \{(B, Y)\} = \{((0,1,0),(0,1,0))\}$.

Contenido

Equilibrio

Definition (Equilibrio de Nash - Cournot)

Una estrategia mixta conjunta $\widehat{\sigma} \in \Sigma$ es un equilibrio de Nash - Cournot si para todo jugador i y para toda estrategia $\sigma_i \in \Sigma_i$:

$$\bar{\pi}_i(\widehat{\sigma}_i, \widehat{\sigma}_{-i}) \geq \bar{\pi}_i(\sigma_i, \widehat{\sigma}_{-i})$$

Equilibrio de Nash - Cournot

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\widehat{\sigma}$ es un equilibrio de Nash.
2. Para todo i, $\overline{\pi}_i(\widehat{\sigma}_i, \widehat{\sigma}_{-i}) \geq \overline{\pi}_i(s_i, \widehat{\sigma}_{-i})$ para todo s_i.
3. Para todo jugador, $\overline{\pi}_i(\widehat{\sigma}_i, \widehat{\sigma}_{-i}) = \overline{\pi}_i(s_i, \widehat{\sigma}_{-i})$ para todo s_i en el soporte de $\widehat{\sigma}_i$ y $\overline{\pi}_i(\widehat{\sigma}_i, \widehat{\sigma}_{-i}) \geq \overline{\pi}_i(s_i, \widehat{\sigma}_{-i})$ para todo s_i por fuera del soporte de $\widehat{\sigma}_i$.

Equilibrio de Nash - Cournot

Example (Cara y sello)

Como habíamos visto en el capitulo anterior, en el ejemplo de cara y sello no existe un equilibrio de Nash - Cournot en estrategias puras. Sin embargo, la estrategia mixta $\sigma_i = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ para cada jugador es un equilibrio Nash - Cournot en estrategias mixtas.

1\2	C	S
C	1,-1	-1,1
S	-1,1	1,-1

Equilibrio de Nash - Cournot

Theorem (Nash 1950)

Todo juego finito (i.e., el número de jugadores y conjunto de estrategias de cada jugador es finito) tiene un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Contenido

Seguridad

Definition

Un juego bilateral de suma cero es un juego $G = (\{1,2\}, \{S_i\}_{i=1,2}, \{\pi_i\}_{i=1,2})$ tal que para todo $s \in S$, $\pi_1(s) + \pi_2(s) = 0$.

Seguridad

Theorem (von Neumann, 1928)

Sea G una juego bilateral de suma cero. Entonces:

1. $\max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2) = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2)$. *El primer valor lo denominamos el valor maxmin del jugador 1 y lo denotamos por* v_1*, el segundo lo denominamos el valor minmax del jugador 1 y lo denotamos por* v_2*. Luego el teorema afirma que en un juego de suma cero estos dos valores son iguales y denotamos el valor común por* v_1^* *denominado el valor del juego para el jugador 1.*
2. *Para todo equilibrio de Nash - Cournot* (σ_1^*, σ_2^*) *tenemos* $v_1^* = \pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ *y viceversa, si* σ_1^*, σ_2^* *son estrategias maxmin para cada jugador entonces* (σ_1^*, σ_2^*) *es un equilibrio de Nash - Cournot. En particular, todos los equilibrios de Nash - Cournot generan la misma utilidad.*

Seguridad: Ejercicio

Demostrar la propiedad de intercambiabildad del equilibrio para juegos de suma cero.