

Juegos Estratégicos de Información Completa¹

Alvaro J. Riascos Villegas
Universidad de los Andes y Quantil

Enero 2025

¹Basado en Riascos, A. 2024. Juegos Estratégicos y sus Aplicaciones.
www.alvaroriascos.com

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Juegos Estratégicos
- 3 Teoría de la decisión con múltiples agentes
- 4 Soluciones de un juego
- 5 Eliminación de estrategias dominadas
- 6 Equilibrio
- 7 Seguridad

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Juegos Estratégicos
- 3 Teoría de la decisión con múltiples agentes
- 4 Soluciones de un juego
- 5 Eliminación de estrategias dominadas
- 6 Equilibrio
- 7 Seguridad

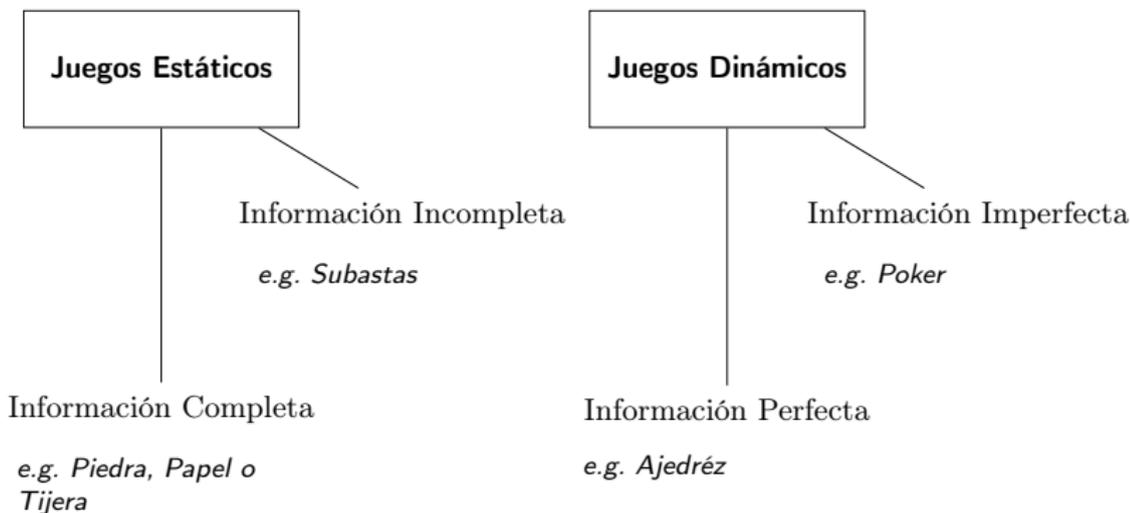
¿Qué es la teoría de juegos?

- La teoría de juegos es el estudio de las interacciones estratégicas entre agentes racionales con diferentes objetivos.
- La principal característica de esta teoría es que reconoce que las decisiones de un jugador pueden afectar de forma directa los objetivos de los demás jugadores.
- Podemos dividir la teoría en dos grandes ramas; la teoría de juegos estratégicos (o juegos no cooperativos) y la teoría de juegos coalicionales (o juegos cooperativos).
- En este libro nos vamos a concentrar únicamente en la teoría de juegos estratégicos.

¿Qué es la teoría de juegos?

- Los juegos estratégicos se pueden representar de dos formas.
 - 1 Forma normal, para juegos estáticos.
 - 2 Forma extensiva, para juegos dinámicos.

¿Qué es la teoría de juegos?



Contenido

- 1 Introducción
- 2 Juegos Estratégicos**
- 3 Teoría de la decisión con múltiples agentes
- 4 Soluciones de un juego
- 5 Eliminación de estrategias dominadas
- 6 Equilibrio
- 7 Seguridad

Forma Normal

Definition (Juego en forma normal)

Un juego en forma normal es una estructura

$G = (N, \{S_i\}_{i=1, \dots, n}, \{\pi_i\}_{i=1, \dots, n})$ donde

- 1 N es un conjunto de jugadores, $N = \{1, \dots, n\}$.
- 2 S_i es un conjunto de acciones o estrategias puras para cada jugador.
- 3 $\pi_i : \prod_{i=1}^n S_i \rightarrow \mathbb{R}$ es la utilidad (pago neto) de cada jugador.

Example (Dilema de los prisioneros)

Sea $n = 2$, $S_1 = S_2 = \{A, C\}$. El pago neto de cada agente lo representamos mediante la siguiente tabla. La convención que vamos a utilizar es que la estrategia del jugador 1 la representan las filas y las del jugador 2 las columnas. El pago neto del primer jugador es el primer número de cada celda. Del segundo jugador, el segundo.

1\2	A	C
A	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

Example (Batalla de los sexos)

Supongamos que hay dos agentes $n = 2$, $S_1 = S_2 = \{B, S\}$,
 $\pi_1, \pi_2 : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$

M \ H	B	S
B	3,2	1,1
S	0,0	2,3

Example (Juego de conducción)

Supongamos que hay dos conductores que en ausencia de normas de tránsito deben decidir todos los días por cuál carril conducir su carro. Entonces $n = 2$, $S_1 = S_2 = \{D, I\}$, $\pi_1, \pi_2 : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$

M\H	D	I
D	1,1	0,0
I	0,0	1,1

Example (Juego de revelación)

Los dos jugadores son un ser superior (SB) y una persona (P). Las estrategias para SB son: $S_{SB} = \{RE, NRE\}$, $S_P = \{CE, NCE\}$ donde RE y NRE significan respectivamente que SB revela su existencia y que no revela su existencia y CE , NCE significan respectivamente que P cree o no cree en su existencia.

$SB \backslash P$	CE	NCE
RE	3,4	1,1
NRE	4,2	2,3

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Juegos Estratégicos
- 3 Teoría de la decisión con múltiples agentes**
- 4 Soluciones de un juego
- 5 Eliminación de estrategias dominadas
- 6 Equilibrio
- 7 Seguridad

Elementos principales

- 1 El conjunto de acciones y/o un conjunto de consecuencias.
- 2 Una relación de preferencia sobre las consecuencias.
- 3 Una hipótesis de comportamiento o racionalidad.
- 4 Una estructura de conocimiento.

Example (Paradoja de los sombreros)

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Juegos Estratégicos
- 3 Teoría de la decisión con múltiples agentes
- 4 Soluciones de un juego**
- 5 Eliminación de estrategias dominadas
- 6 Equilibrio
- 7 Seguridad

¿Qué es solucionar un juego?

- ¿Cuál es nuestra mejor predicción de la interacción de los agentes en el juego?
- ¿Qué estrategias consideramos razonables para cada jugador?
- ¿Qué debería de jugar cada jugador?
- Todo concepto de solución de un juego está basado en un supuesto sobre todas las características fundamentales de un problema de decisión con múltiples agentes.

¿Qué es solucionar un juego?

- *Una solución de un juego es una descripción sistemática del resultado que podríamos esperar de la interacción de los jugadores en el juego.*
- Hay tres conceptos claves que unifican las ideas principales relacionadas con la solución de un juego.
 - 1 Dominancia
 - 2 Estabilidad
 - 3 Seguridad

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Juegos Estratégicos
- 3 Teoría de la decisión con múltiples agentes
- 4 Soluciones de un juego
- 5 Eliminación de estrategias dominadas**
- 6 Equilibrio
- 7 Seguridad

Definiciones básicas

Definition (Dominancia)

Una estrategia $\hat{s}_i \in S_i$ domina débilmente una estrategia $s_i \in S_i$, o s_i es una estrategia débilmente dominada por \hat{s}_i , si para todo $s_{-i} \in S_{-i}$:

$$\pi_i(\hat{s}_i, s_{-i}) \geq \pi_i(s_i, s_{-i})$$

con desigualdad estricta por lo menos para un s_{-i} .

Example

En el siguiente juego, para el agente 1, Y domina a Z.

1\2	A	B	C
X	2,7	2,0	2,2
Y	7,0	1,1	3,2
Z	4,1	0,4	1,3

Definition (Estrategias dominantes)

Una estrategia $\hat{s}_i \in S_i$ es una estrategia dominante débilmente si domina débilmente a toda estrategia. Decimos que es dominante (estrictamente) si domina (estrictamente) a toda estrategia.

Definition (Equilibrio en estrategias dominantes)

Cuando cada uno de los jugadores tiene una estrategia dominante estrictamente (débilmente) $\hat{s}_i \in S_i$, decimos que el juego tiene un equilibrio en estrategias dominantes estrictamente (débilmente). Este equilibrio es el perfil de estrategias $\hat{s} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_n) \in S$.

Ejemplos

Example (Dilema de los prisioneros)

En el dilema de los prisioneros cada uno de los agentes tiene una estrategia dominante.

1\2	A	C
A	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

Obsérvese que $\pi_i(A, s_{-i}) > \pi_i(C, s_{-i})$ para todo i y para todo $s_{-i} \in S_{-i}$.

Ejemplo

Example (Batalla de los sexos)

En la batalla de los sexos ningún jugador tiene una estrategia dominante.

M \ H	B	S
B	3,2	1,1
S	0,0	2,3

Eliminación de estrategias dominadas

- El equilibrio en estrategias dominantes es un concepto de equilibrio muy fuerte desde el punto de vista estratégico, ya que requiere de la existencia de estrategias dominantes para cada jugador.
- Es muy débil desde el punto de vista del grado de conocimiento que se supone de los jugadores.
- El equilibrio en estrategias dominantes estrictamente se basa en una hipótesis de comportamiento débil: Los individuos no juegan nunca una estrategia que es dominada.

Definition (Estrategias no dominadas estrictamente de forma iterativa)

Sea $S_i^0 = S_i$ y definamos S_i^k , $k \geq 0$ de la siguiente forma:

$$S_i^{k+1} = \left\{ s_i \in S_i^k : \text{No existe } \hat{s}_i \in S_i^k \text{ tal que } \right. \\ \left. \pi_i(\hat{s}_i, s_{-i}) > \pi_i(s_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}^k \right\}$$

Definition (Juegos solucionables en estrategias no dominadas iterativamente)

Si S^∞ consiste de un sólo elemento, decimos que el juego es solucionable en estrategias no dominadas estrictamente de forma iterativa.

Example

Consideremos el juego:

1\2	A	B	C
X	2,7	2,0	2,2
Y	7,0	1,1	3,2
Z	4,1	0,4	1,3

El proceso de eliminación arroja:

$$\begin{array}{l|l}
 S_1^0 = \{X, Y, Z\} & S_2^0 = \{A, B, C\} \\
 S_1^1 = \{X, Y\} & S_2^1 = \{A, B, C\} \\
 S_1^2 = \{X, Y\} & S_2^2 = \{A, C\} \\
 S_1^3 = \{Y\} & S_2^3 = \{A, C\} \\
 S_1^4 = \{Y\} & S_2^4 = \{C\}
 \end{array}$$

Example (Eliminación de estrategias dominadas débilmente)

Considere el siguiente ejemplo:

1\2	L	R
U	5,1	4,0
M	6,0	3,1
D	6,4	4,4

Observe que D domina débilmente tanto a U como a M . Si se empieza el proceso eliminando a U solamente, el resultado es diferente a si se empieza eliminando a M solamente y es diferente a si se eliminan ambas al comienzo. Eliminando a U sobreviven $\{(D, R)\}$. Eliminando a M sobreviven $\{(D, L)\}$. Dominando débilmente a U y a M sobreviven $\{(D, L), (D, R)\}$.

Sea EW y ES el conjunto de equilibrios en estrategias dominantes débilmente y estrictamente respectivamente. Demostrar que:

$$ES \subseteq EW \subseteq W^\infty \subseteq S^\infty$$

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Juegos Estratégicos
- 3 Teoría de la decisión con múltiples agentes
- 4 Soluciones de un juego
- 5 Eliminación de estrategias dominadas
- 6 Equilibrio**
- 7 Seguridad

Equilibrio de Nash - Cournot

Definition (Equilibrio de Nash - Cournot)

Una estrategia conjunta $\hat{s} \in S$ es un equilibrio de Nash - Cournot si para todo jugador i y para toda estrategia $s_i \in S_i$:

$$\pi_i(\hat{s}_i, \hat{s}_{-i}) \geq \pi_i(s_i, \hat{s}_{-i})$$

Example (Dilema de los prisioneros)

En el dilema de los prisioneros el equilibrio de Nash $\hat{s} = \{(A, A)\}$ coincide con el equilibrio en estrategias dominantes.

1\2	A	C
A	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

Example (Batalla de los sexos)

La batalla de los sexos tiene dos equilibrios de Nash ninguno de los cuales es un equilibrio en estrategias dominantes.

M\H	B	S
B	3,2	1,1
S	0,0	2,3

Example (Paradoja de Braess)

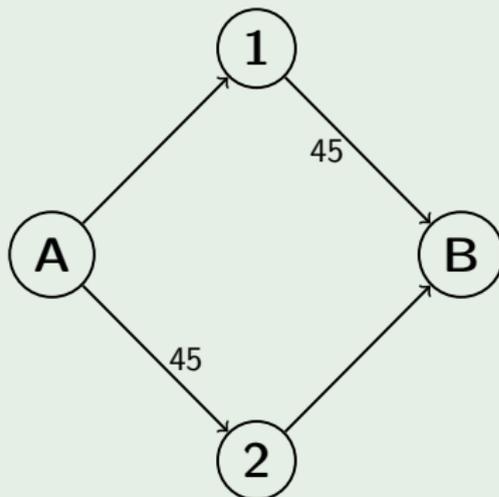


Figura 1.2: Rutas posibles para ir de la ciudad A a la B.

Número de carros = 4,000. Tiempo por segmento = número de carros / 100.

Example (Paradoja de Braess)

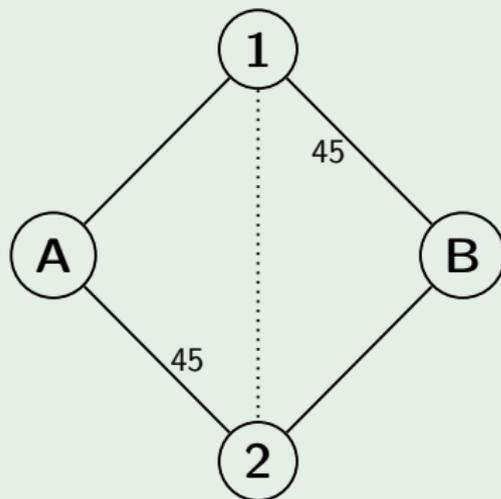


Figura 1.3: Rutas posibles para ir de la ciudad A a la B al construir una nueva carretera (línea punteada).

Nash sobrevive eliminación estricta

Todo equilibrio de Nash sobrevive el proceso de eliminación de estrategias dominadas estrictamente.

Demostración.

- 1 Sean $EN(S)$ los equilibrios de Nash del juego G cuando el espacio de estrategias es S . Es claro que $EN(S) \subseteq S^1$ (la eliminación estricta no puede eliminar una estrategia que haga parte de un equilibrio de Nash).
- 2 Ahora, se puede demostrar por contradicción que $EN(S) \subseteq EN(S^1)$.
- 3 Luego aplicando el primer argumento al caso en que el juego tiene como espacio de estrategias S^1 obtenemos $EN(S^1) \subseteq S^2$.
Por lo tanto $EN(S) \subseteq S^2$.
- 4 Repetimos el argumento.



Nash no sobrevive eliminación débil

Example

Nash no sobrevive eliminación iterativa de estrategias dominadas débilmente.

1\2	A	B
A	1,1	0,-3
B	-3,0	0,0

Note que (A, A) y (B, B) son equilibrios de Nash. Sin embargo, para ambos jugadores B es una estrategia dominada débilmente.

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Juegos Estratégicos
- 3 Teoría de la decisión con múltiples agentes
- 4 Soluciones de un juego
- 5 Eliminación de estrategias dominadas
- 6 Equilibrio
- 7 Seguridad

Ejemplo

Example

Considere el siguiente juego:

1\2	A	B
X	2,1	2,-20
Y	3,0	-10,1
Z	-100,2	3,3

El único equilibrio de Nash (Z, B) de este juego es un poco peligroso para el jugador 1. Observemos que si el jugador 2 comete un error y no juega Nash entonces 1 se ve muy perjudicado (pasa de ganar 3 a -100). Alternativamente él podría jugar una estrategia que le garantizara el mejor pago posible en el peor de los casos.

Definition

Formalmente el valor maximin o valor de seguridad de un jugador, en estrategias puras, se define como la utilidad para el jugador i cuando el jugador i resuelve:

$$\max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} \pi_i(s_i, s_{-i})$$