Teoría de Subastas de una Única Unidad

Alvaro J. Riascos Villegas

Abril de 2024

Contenido

1. Introducción a la Teoría de Subastas
2. Subasta al segundo precio
3. Subasta al primer precio
4. Equivalencia entre subastas
5. Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado
6. Desviaciones del Modelo Estándar
7. Precio de Reserva y Costos de Entrada

Introducción

- Las subastas son un mecanismo de asignación de recursos y formación de precios.
- Son un mecanismo universal y anónimo.
- Taxonomía:
    - Tipo de bien (unitarias, multiunidades o múltiples objetos).
    - Estructura de información (independiente o afiliadas).
    - Estructura de valoración (privada, interdependiente, común).

- Tipos de subastas:
    - Para subastas unitarias existen cuatro subastas básicas.
        - Primer precio (cerrada)
        - Segundo precio (cerrada)
        - Inglesa (abierta)
        - Holandesa (abierta)
- Otros ejemplos de subastas son:
    - Subastas al tercer precio.
    - Todos pagan.
    - Una loteria (ésta, sin embargo, no es una subasta estándar; una subasta es estándar cuando el ganador es el que más ofrece por el bien).

- Las preguntas fundamentales que se hace la teoría son:
  - Existencia del equilibrio del juego bayeasiano inducido.
  - Equivalencia en asignación de recursos y precios de equilibrio.
  - Optimalidad para el subastador.
  - Bienestar social: beneficios de las firmas y excedente del consumidor (e.g., mercado mayorista de energía). ¿Qué tan lejos esta el equilibrio del equilibrio eficiente (la literatura estudia esto bajo los nombres de precio de la anarquía y precio de la estabilidad).
  - Incentivos a coludir.
  - Simplicidad de las reglas.
  - Identificación y refutabilidad.

- El modelo estándar tiene la siguiente estructura:
  - Estructura de información independiente y simétrica.
  - Estructura de valoración privada y agentes neutros al riesgo.
  - En particular, agentes simétricos.

- El modelo estándar es un juego de información incompleta con la siguiente estructura:

$$BG = (N, (R_+)_{i\in N}, ([0,\omega])_{i\in N}, (\pi_i)_{i\in N}, F)$$

  - N es un conjunto de jugadores (finito).
  - El conjunto de acciones es el mismo para todos: $A = R_+$
  - El conjunto de información, que en este caso lo interpretamos como la valoración privada que del objeto tiene el agente, es el mismo para todos: $T_i = [0, \omega]$.
  - Denotamos por F la distribución sobre t_i, el conjunto de información individual.
  - F tiene densidad f.
  - $\pi_i : R_+^N \times [0,\omega]^N \rightarrow R$ es el payoff de cada jugador y su forma específica depende del tipo de subasta que estémos considerando.

Contenido

1. Introducción a la Teoría de Subastas
2. Subasta al segundo precio
3. Subasta al primer precio
4. Equivalencia entre subastas
5. Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado
6. Desviaciones del Modelo Estándar
7. Precio de Reserva y Costos de Entrada

Subasta al segundo precio

- En esta subasta cada agente observa su valoración $t_i \in T_i$ y escribe en un sobre su oferta por el bien. Gana el jugador que más ofrezca y paga la segunda oferta más alta. En caso de empate se asigna el objeto aleatoriamente entre los ganadores y se paga lo ofertado.
- El payoff de los agentes es:

$$\begin{aligned} \pi_i &: R_+^N \times [0,\omega]^N \to R \\ \pi_i(b_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) &= t_i - \max_{j \neq i} \{b_j\} \text{ si } b_i > \max_{j \neq i} \{b_j\} \\ \pi_i(b_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) &= 0 \text{ si } b_i < \max_{j \neq i} \{b_j\} \end{aligned}$$

Subasta al segundo precio

- La expresión del payoff pone en evidencia algunos de los supuestos que hicimos anteriormente (valoración privada y neutralidad al riesgo).
- La estrategia de revelar la verdad para cada jugador, $\mathbf{b}^{II}(t_i) = t_i$ es un equilibrio en estrategias dominantes (débilmente).
- Obsérvese que la estrategia es la misma para cada jugador. Esto es lo que se conoce cómo un equilibrio simétrico.
- Este equilibrio es independiente de la estructura de información (en particular vale aún en el caso en que la información es correlacionada o los conjuntos de información son diferentes)
- El argumento anterior también funciona cuando los agentes son aversos al riesgo.

Subasta al segundo precio

- Demostración: Supongamos que cada agente observa su valoración privada y hace una oferta por el bien.
- Fijemos un agente, digamos el agente i y concentrémonos en su estrategia. Sea $Y_1 = \max_{j \neq i} \{b_j\}$. Y_1 determina si el agente i gana o no.
- Primero algunas observaciones: $\mathbf{b}_i(t_i) > t_i$ no es racional (en el sentido débil) pues la estrategia $\overline{\mathbf{b}}_i$ que es igual $\mathbf{b}_i$ en todas partes excepto en t_i, donde es revelar la verdadera valoración, la domina débilmente - cuando la valoración es t_i, el payoff del agente nunca es menor y con probabilidad positiva es mayor.
- El argumento es independiente de las estrategias utilizadas por los demás jugadores.

Subasta al segundo precio

- Si $\mathbf{b}_i(t_i) < t_i$ pueden suceder tres cosas:

	Payoff		
	Estrategia $\mathbf{b}_i$		Estrategia $\mathbf{b}^{II}$
$Y_1 < b_i < t_i$	i gana	$t_i - Y_1$	$t_i - Y_1$
$b_i < Y_1 < t_i$	i pierde	0	$t_i - Y_1$
$b_i < t_i \leq Y_1$	i pierde	0	0

- Comparando con el resultado que hubiera tenido de utilizar la estrategia de revelar la verdad, es claro que esta última domina.

Subasta al segundo precio

- Formalmente lo que hemos hecho es demostrar que la estrategia
  $\mathbf{b}^{II}(t_i) = t_i$ domina a cualquier otra estrategia $\mathbf{b}_i$.Esto es:

$$\pi_i(t_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) \geq \pi_i(\mathbf{b}_i\left(t_i\right), b_{-i}, t_i, t_{-i})$$

  para todo $t \in t$ y b_{-i}.
- Obsérvese que en ninguna parte utilizamos la estructura de información.
- Es fácil extender el argumento al caso en que los agentes son aversos al riesgo.

Subasta al segundo precio

- El *pago esperado* de un jugador (al subastador) con valoración t, $m^{II}(t)$ es:

  $$m^{II}(t) = G(t)E_{-i}\left[Y_1 \mid t > Y_1\right]$$

  donde $G(t)$ es a probabiidad de ganar (la probabilidad que el agente le atribuye al conjunto $[t > Y_1]$, es decir, la distribución de Y_1 y $E_{-i}\left[Y_1 \mid t > Y_1\right]$ es el pago esperado del agente dado que es ganador).
- Para ver esto comencemos de principios básicos.

Subasta al segundo precio

- Para obtener la fórmula anterior es necesario saber un poco de probabilidad (aunque intuitivamente esa fórmula es correta).
- Sea $m^{II}(t, t_{-i})$ el pago en equilibrio de un jugador con valoración t cuando todos los demás tienen valoración t_{-i}.

$$m^{II}(t, t_{-i}) = I_{[t>Y_1]} Y_1$$

  donde $I_{[t>Y_1]}$ es la función indicadora del conjunto $\{t > Y_1\}$.
- Si ahora marginalizamos sobre t_{-i} usando la distribución F^{N-1} obtenemos $m^{II}(t)$, el pago esperado de cada jugador cuando su valoración privada es t.
- Obsérvese que la distribución de G de Y_1 es F^{N-1}. Luego:

$$\begin{aligned} m^{II}(t) &= \int I_{[t>Y_1]} Y_1 dF^{N-1} = \int I_{[t>Y_1]} Y_1 dG \\ &= \int_{[t>Y_1]} Y_1 dG == \int_0^t y dG(y) \end{aligned}$$

Interludio: Esperanza Condicional

- Ahora una definición: Dada una variable aleatoria X con valores en $[0, \omega]$, el valor esperado de X condicional a $X \leq x$ es por definición:

$$E[X|X \leq x] = \frac{1}{F(x)} \int_0^x yf(y)dy \tag{1}$$

  donde F y f es la distribuión y densidad de X respectivamente.
- Si aplicamos esta definición a $X = Y_1$ obtenemos la fórmula que queríamos.

Subasta al segundo precio

- Obsérvese que la subasta al segundo precio asigna eficientemente el objeto entre los participantes.

Contenido

1. Introducción a la Teoría de Subastas
2. Subasta al segundo precio
3. Subasta al primer precio
4. Equivalencia entre subastas
5. Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado
6. Desviaciones del Modelo Estándar
7. Precio de Reserva y Costos de Entrada

Subasta al primer precio

- En esta subasta los agentes observan su valoración (información) y hacen una oferta. Gana el que oferte más alto y paga lo ofertado. En caso de empate se asigna aleatoriamente.
- El payoff de los agentes es:

$$\begin{aligned} \pi_i &: R_+^I \times [0,\omega]^I \to R \\ \pi_i(b_i, b_{-i}, t_i, T_{-i}) &= t_i - b_i \text{ si } b_i > \max_{j \neq i}\{b_j\} \\ \pi_i(b_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) &= 0 \text{ si } b_i < \max_{j \neq i}\{b_j\} \end{aligned}$$

- Existe un compromiso claro entre ofertar alto y el pago.

Subasta al primer precio

- Nos vamos a concentrar en el equilibrio simétrico.
- En este caso no existe un equilibrio en estrategias dominantes.
- Vamos a caracterizar el equilibrio de Nash-Bayesiano.
- Supongamos que i tiene una valoración t_i y ofrece $b_i \in R_+$.
- Supongamos que todos los jugadores $j \neq i$ utilizan una estrategia $\mathbf{b}^I$ diferenciable y creciente.
    - Es claro que $b_i \leq \mathbf{b}^I(\omega)$.
    - También es fácil de ver que si $t_i = 0$ entonces $b_i = 0$ y $\mathbf{b}^I(0) = 0$.

- Entonces,

$$\left\{b_i > \max_{j\neq i}\left\{\mathbf{b}^I(t_j)\right\}\right\} = \left\{b_i > \mathbf{b}^I(Y_1)\right\} = \left\{\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1} b_i > Y_1\right\}$$

  - Denotamos por G la distribución de Y_1 (la probabilidad de recibir la valoración más alta).
  - Si la estructura de información es independiente y simétrica tenemos que $G = F^{N-1}$ y su densidad g es $g = (N-1)\,F^{N-2}f$.
  - Entonces la probabilidad de ganar con una oferta b_i es:

$$P\left(\left\{b_i > \max_{j\neq i}\left\{\mathbf{b}^I(t_j)\right\}\right\}\right) = G(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i))$$

Subasta al primer precio

- El pago (interim) del jugador i es:

$$E_{-i}[\pi_i \mid T_i = t_i] = G(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i))(t_i - b_i)$$

- Las condiciones de primer orden con respecto a b_i son:

$$\frac{g(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i))}{\frac{d\mathbf{b}^I\left(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i)\right)}{dt}}(t_i - b_i) - G(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i)) = 0$$

- Si existe un equilibrio simétrico entonces $\mathbf{b}^I(t_i) = b_i$ y las CPO se reducen a:

$$\begin{aligned}
\frac{g(t_i)}{\frac{d\mathbf{b}^I(t_i)}{dt}}(t_i - \mathbf{b}^I(t_i)) - G(t_i) &= 0 \\
&\Rightarrow \\
\frac{d\left(G(t)\mathbf{b}^I(t)\right)}{dt} &= tg(t) \\
&\Rightarrow \\
\mathbf{b}^I(t) &= \frac{1}{G(t)}\int_0^t yg(y)dy \\
\equiv E[Y_1 \,|\, Y_1 < t]
\end{aligned}$$

Subasta al primer precio

- Obsérvese que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}^{I}(t) &= \frac{1}{G(t)}\int_0^t y g(y)dy \\
&< \tfrac{1}{G(t)}\int_0^t t g(y)dy = t
\end{aligned}
$$

Subasta al primer precio

- El pago esperado de un individuo es:

$$m^I(t) = G(t)b^I(t) = G(t)E[Y_1 \,|\, Y_1 < t] \qquad (2)$$

- Obsérvese que dado que el jugador es ganador, su pago esperado es simplmente $b^I(t)$.
- Luego $m^I(t) = m^{II}(t)$: El pago esperado de cada jugador es el mismo luego el pago esperado para el subsatador es el mismo en la subasta al primer precio y segundo precio.
- Por la simetría del equilibrio y la monotonicidad es fácil ver que la subasta asigna eficientemente el objeto entre los participantes.

Subasta al primer precio

Example

Si la estructura de información es uniforme en $[0, 1]$ entonces

$$\mathbf{b}^{I}(t) = \frac{N-1}{N}t$$

Contenido

1. Introducción a la Teoría de Subastas
2. Subasta al segundo precio
3. Subasta al primer precio
4. Equivalencia entre subastas
5. Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado
6. Desviaciones del Modelo Estándar
7. Precio de Reserva y Costos de Entrada

Equivalencia entre subastas

- La subasta al primer precio y la subasta holandesa son estratégicamente equivalentes. Este resultado es independiente de la estructura de información, valoración o actitud frente al riesgo. Por eso decimos que es una equivalencia fuerte.
- Bajo el supuesto de valores privados, la subasta inglesa es equivalente a la subasta al segundo precio.

Contenido

1. Introducción a la Teoría de Subastas
2. Subasta al segundo precio
3. Subasta al primer precio
4. Equivalencia entre subastas
5. **Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado**
6. Desviaciones del Modelo Estándar
7. Precio de Reserva y Costos de Entrada

Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado para el Subastador

- Supongamos que estamos bajo las condiciones del modelo estándar.
- Supongamos que el pago esperado de un jugador con valoración privada cero es cero.
- Un ejemplo son los cuatro formatos de subastas discutidos anteriormente.

Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado para el Subastador

Theorem (Teorema de Equivalencia del Ingreso para el Subastador)

Bajo las condiciones enunciadas arriba, cualquier equilibrio simétrico creciente genera el mismo ingreso esperado al subastador.

- Sea $m^A(t)$ el pago esperado de un individuo que dice tener valoración t en una subasta A y $\mathbf{b}^A(t)$ un equilibrio creciente simétrico. Por hipótesis $m^A(0) = 0$. El payoff esperado del jugador que reporta $\mathbf{b}_i^A(z)$ (como si su valoración hubiera sido z) es:

$$E_{-i}[\pi_i(\mathbf{b}_i^A(z), \mathbf{b}_{-i}^A(T_{-i}), t, T_{-i})] = G(z)t - m^A(z).$$

Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado para el Subastador

- Las condiciones de primer orden con respecto a z evaluadas en $z = t$ son:

$$\begin{aligned} \frac{dm^A(y)}{dy} &= yg(y) \\ &\Longrightarrow \\ m^A(t) &= G(t)E_{-i}[Y_1 \mid Y_1 < t]. \end{aligned}$$

Lo que muestra que el pago esperado de cada jugador es independiente del mecanismo particular de la subasta.

Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado para el Subastador

Example

Si la estructura de información es uniforme en $[0, 1]$ entonces

$$m^A(t) = \frac{N-1}{N} t^N$$

y el ingreso esperado del subastador, $E[R^A]$ es:

$$E[R^A] = NE[m^A] = \frac{N-1}{N+1}$$

Contenido

1. Introducción a la Teoría de Subastas
2. Subasta al segundo precio
3. Subasta al primer precio
4. Equivalencia entre subastas
5. Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado
6. Desviaciones del Modelo Estándar
7. Precio de Reserva y Costos de Entrada

Desviaciones del Modelo Estándar

- Mantenemos dos de los supuestos básicos del modelo estándar: Valores privados e independencia de la información.
- Estudiamos el caso de
  1. Aversión al riesgo (pero jugadores simétricos en su utilidad)
  2. Asimetrías en la estructura de información.
- En la sección anterior vimos que en la subasta al segundo precio, aún con agentes aversos al riesgo, era un equilibrio en estrategias dominates revelar la verdadera valoración. Por lo tanto el ingreso esperado del subastador es el mismo.

Theorem

Con agentes aversos al riesgo pero estructura de información simétrica, las ofertas en la subasta al primer precio son más altas que con agentes neutros al riesgo. Luego en este caso, el ingreso esperado para el subastador es mayor en la subasta al primer precio que en la subasta al segundo.

Example

Consideremos la subasta al primer precio y supongamos que tenemos dos agentes. $T_i \sim F_i$ distribuidas en $[0, w_i]$.

- Supongamos que existe un equilibrio creciente y diferenciable $\mathbf{b}_i$, $\mathbf{b}_j$. El pago esperado de cada agente es:

$$E_{-i}[\pi_i \mid T_i = t] = F_{-i}(\mathbf{b}_j^{-1}(b))(t_i - b)$$

- Las condiciones de primer orden son:

$$\phi_j'(b) = \frac{F_j(\phi_j(b))}{f_j(\phi_j(b))} \frac{1}{(\phi_i(b) - b)}$$

donde $\phi_j = \mathbf{b}_j^{-1}$.

Desviaciones del Modelo Estándar: Asimetrías de Información

Example

- Este sistema de ecuaciones diferenciables puede utilizarse para demostrar que existe una solución junto con la condición de frontera $\phi_i(0) = 0$.
- Esto no es totalmente trivial pues en la frontera la ecuación es indeterminada.

Desviaciones del Modelo Estándar: Asimetrías de Información

Example (El caso uniforme)

Supongamos F_1 y F_2 son distribuciones uniformes con $w_1 \geq w_2$. Entonces las condiciones de primer orden se reducen

$$\phi_i'(b) = \frac{\phi_i(b)}{(\phi_j(b) - b)}$$

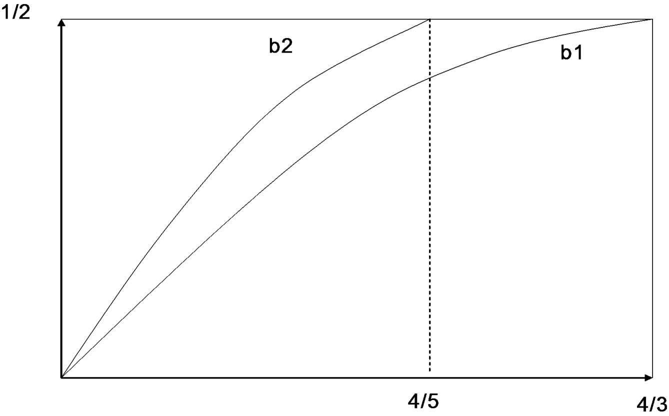
Es fácil demostrar que las siguientes estrategias son solución al sistema de ecuaciones diferenciables:

$$\mathbf{b}_i(t) = \frac{1}{\kappa_i t}\left(1 - \sqrt{1 - \kappa_i t^2}\right)$$

donde $\kappa_i = \frac{1}{w_i^2} - \frac{1}{w_j^2}$.

Example

Cuando $w_1 = \frac{4}{3}$ y $w_2 = \frac{4}{5}$ entonces las soluciones tienen la forma:



Desviaciones del Modelo Estándar: Asimetrías e Ingreso Esperado

- La subasta al segundo precio sigue siendo eficiente.
- La subasta al primer precio puede ser ineficiente con probabilidad positiva (considere el ejemplo donde $w_1 = \frac{4}{3}$ y $w_2 = \frac{4}{5}$).

Desviaciones del Modelo Estándar: Asimetrías e Ingreso Esperado

- El mensaje principal es que no existe un ordenamiento unívoco del ingreso esperado del subastador en presencia de asimetrías.

Desviaciones del Modelo Estándar: Carteles

- El estudio de la cartelización en una subasta puede interpretarse como otra desviación del modelo estándar en donde nos apartamos del supuesto de comportamiento no cooperativo y permitimos la formación de carteles o coalisiones.
- Las preguntas claves son:
  - ¿Cómo un cartel puede asegurar que se respetarán los arreglos a los que se ha llegado entre sus miembros?
  - ¿Cómo se reparten las ganacias de la colusión entre los miembros del cartel?
  - ¿Cómo deben responder los otros, en particular, el subastador?

Desviaciones del Modelo Estándar: Carteles

- Nos enfocamos en el modelo estándar excepto que la estructura de información puede ser asimétrica (por simplicidad suponemos que todas las valoraciones están en el mismo intervalo).
- Es decir, mantenemos las hipótesis de valores privados e información independiente.
- Aún si los jugadores fueran exante simétricos, la presencia de carteles introduciría asimetrías entre ellos.
- Es del interés del cartel que el ganador sea aquel miembro con mayor valoración. Sin embargo, es necesario diseñar un mecanismo previo para determinar quién tiene la valoración más alta.

Desviaciones del Modelo Estándar: Carteles

- Concentremonos en la subasta al segundo precio.
- La presencia de un cartel no afecta el comportamiento ni el pago esperado de los que están por fuera. Sigue siendo una estrategia dominante (débilmente) revelar la verdadera valoración.
- Para los miembros del cartel es una estrategia dominante (débilmente) hacer una oferta con la valoración más alta entre los miembros del cartel (y cero, o el precio de reserva todos los demás).

Contenido

1. Introducción a la Teoría de Subastas
2. Subasta al segundo precio
3. Subasta al primer precio
4. Equivalencia entre subastas
5. Teorema de Equivalencia del Ingreso Esperado
6. Desviaciones del Modelo Estándar
7. Precio de Reserva y Costos de Entrada

Precio de Reserva y Costos de Entrada

- Suponga que estamos bajo las condiciones del modelo estándar (valores privados, información independiente, agentes neutros al riesgo).
- Suponga que el subastador anuncia un precio de reserva $r > 0$.
- La subasta al segundo precio gana quién más oferta siempre y cuando sea superior al precio de reserva y paga $\text{máx}\{r, Y_1\}$ donde Y_1 es la segunda valoración más alta.
- En este caso sigue siendo un estrategia dominante ofertar su verdadera valoración.

Precio de Reserva y Costos de Entrada

- El pago esperado para un jugador con $t \geq r$ es (cero de lo contrario):

$$m^{II}(t,r) = rG(r) + \int_r^t yg(y)dy \tag{3}$$

- Para ver esto obsévese que de forma análoga al caso de la subasta al segundo precio:

$$m^{II}(t,r) = P(t > max\{r, Y_1\})E_{-i}\left[max\{r, Y_1\} \mid t > max\{r, Y_1\}\right] \tag{4}$$

$$= \int_0^t max\{r, y\}dF_r \tag{5}$$

donde F_r es la distribución de $max\{r, Y_1\}$.

- Es fácil convencerse que $F_r = G(t)$ si $r \leq t$ y cero caso contrario.
- Ahora, descomponiendo la intergal como una integral entre cero y r y otra entre r y t se obtiene lo que queríamos demostrar (véase nota técnica).

Precio de Reserva y Costos de Entrada

- Se puede demostrar que el pago esperado exante de cada individuo al subastador es (usar integración por partes):

$$E[m^{II}(T,r)] = r(1-F(r))G(r) + \int_r^{\omega} y(1-F(y))g(y)dy \tag{6}$$

- Si el subastador tiene una valoración t_0 por el objeto, es fácil mostra que el precio de reserva óptimo $r^* > t_0$.
- El precio de reserva óptimo no depende del número de participantes, sólo depende de la distribución F.

Precio de Reserva y Costos de Entrada

- Con dos jugadores, $t_0 = 0$, F uniforme en $[0, 1]$ se puede demostrar (ejercicio) que el precio de reserva óptimo es $\frac{1}{2}$ y el beneficio esperado para el substador es $\frac{5}{12}$.

Precio de Reserva y Costos de Entrada

- Suponga que en vez de un precio de reserva el substador anuncia un costo de participación:

$$e(r) = \int_0^r G(y)dy$$

- Se puede demostrar que este costo de entrada replica los mismo resultados que el precio de reserva r (usar integración por partes).

Precio de Reserva y Costos de Entrada

- Obsérvese que con un precio de reserva superior a la valoración del objeto por parte del subastador, existe una probabilidad positiva de que el objeto no sea asignado.
- Esto sugiere que para el subastador existe un compromiso entre eficiencia y optimalidad.