Capítulo 10

Aplicaciones juegos de información incompleta

10.1. Teoría de subastas

Las subastas[1] son un mecanismo de asignación de recursos y formación de precios. Son un mecanismo universal y anónimo. Es decir, en general no dependen de los detalles específicos del bien a ser subastado ni de las identidades de los participantes. Vamos a considerar primero el caso en que es un único bien indivisible el que va ser subastado (e.g., una obra de arte). Las subastas se pueden clasificar por: (1) Tipo de bien: unitarias, multiunidades, paquetes de objetos, etc. (2) Estructura de información (independiente o afiliadas) o (3) Estructura de valoración (privada, interdependiente, común).

Cuando pensamos en el tipo de bien, por ejemplo, las subastas unitarias son subastas de un único bien como una obra de arte en la casa Christie's o una licitación para el desarrollo de una consultoría bien definida, etc. Una subasta de múltiples unidades es, por ejemplo, la venta de bonos en el mercado primario por parte de un gobierno. Usualmente estas emisiones tienen un número de bonos, todos con las mismas características (i.e., vencimiento, cupones y valor nominal), que se subastan entre un conjunto de creadores de mercado. Los creadores de mercado tiene preferencias por uno o mas bonos y pueden hacer múltiples ofertas por diferentes cantidades a diferentes precios (i.e., tasas de interés).

Las subastas también se pueden clasificar según la estructura de información

[1] Basado principalmente en Krishna (2009).

(independiente o afiliadas) o la estructura de valoración (privada, interdependiente o común). Esto quedará más claro más adelante que introduzcamos un poco de notación.

Para subastas de un único objeto existen cuatro subastas básicas:

- Primer precio (cerrada): En esta, cada participante de la subasta escribe en un papel cuanto esta dispuesto a pagar por el objeto y lo envía en un sobre cerrado al subastador. Ningún participante puede observar los que los demás están ofertando. El subastador abre todos los sobres y elige al ganador como el que más oferto por el objeto. Este jugador debe pagar lo que declaró en su sobre cerrado.

- Segundo precio (cerrada): En este formato, cada participante de la subasta escribe en un papel cuanto esta dispuesto a pagar por el objeto y lo envía en un sobre cerrado al subastador. Ningún participante puede observar los que los demás están ofertando. El subastador abre todos los sobres y elige al ganador como el que más oferto por el objeto. Este jugador debe pagar la segunda oferta más alta declarada por todos los participantes.

- Inglesa (abierta). Vamos a considerarar una forma distinta a los formatos que se usan típicamente en el mundo real. Supongamos que todos los participantes se encuentran en un salón y el subastador anuncia un precio muy bajo. Les pide a los participantes que, mientras tengan disponibilidad a pagar el precio anunciado, mantengan una mano levantada. Ahora el subastador comienza a anunciar precios cada vez más altos. En la medida que el precio anunciado, conocimiento común de todos los participantes va aumentando lentamente, algunos participantes bajan su mano. En algún momento en este proceso deben quedar únicamente dos participantes con la mano levantada. Continuando con este proceso debe llegar un momento en que el precio es tan alto que uno de los dos participante baja la mano y solo queda uno con la mano arriba. En este momento el participante con la mano levantada se lleva el objeto y paga el precio que se encuentra anunciado en ese momento (el precio en el cual el segundo participante que tenia la mano levanta, bajo su mano).

- Holandesa (abierta). Este formato es similar al anterior pero se comienza con un precio muy alto y todos los participantes con las manos abajo. El precio comienza a bajar de forma paulatina y el precio es público, conocimiento común para todo los participantes. En algún momento alguno de los participantes levanta una de sus manos señalizando que está dispuesto a llevarse el objeto por el precio que esta siendo anunicado.

Por simplicidad, en todos los casos anteriores suponemos que no hay empate. En caso de empate los resultados que se van a presentar no cambian y lo único que debemos acordar es una regla para dirimir estos empates. Por ejemplo, de forma aleatoria, usando una distribución uniforme elegir el ganador entre los que hacen ofertas iguales más altas. Obérvese que los primeros dos formatos son cerrados, las ofertas se hacen de forma privada y no se conoce ningún precio. En los últimos dos, el precio de cierre (de transacción) se va formando de forma abierta y, en principio, en la medida que se va formando el precio los agentes pueden ir aprnediendo algo de la valoraciones que los demás tienen del objeto.

Otros ejemplos de subastas son las subastas al tercer precio (gana el que más oferta pero paga la tercera oferta más alta!) y todos pagan (gana el que más oferta pero todos pagan lo que ofertaron). Ahora, una lotería es un mecanismo de asginación de recursos, pero no es una subasta (estándar). Una subasta es estándar cuando el ganador es el que más ofrece por el bien. Hay muchos ejemplos de subastas que no son estándar. Entre ellos se encuentra el mercado de compras públicas de la Bolsa Mercantil de Colombia, la licitación de basuras de Bogotá, algunas licitaciones de infraestructura en varios países del mundo, o algunas que han utilizado empresas en Bogotá para contratar servicios. Todos estos mecanismos de asignación tienen en común que no gana el que más ofrece (o menos cobra en el caso de las licitaciones) sino que se calcula un precio promedio y la oferta más cercana por encima del promedio es la ganadora. En el siguiente capítulo estudiaremos un ejemplo de este tipo de mecanismo de asignación.

Las preguntas fundamentales que se hace la teoría son:

- ¿Existe de equilibrio del juego Bayeasiano inducido?
- ¿Son equivalentes en el sentido de que en equilibrio asignan de la misma forma?
- ¿Es el precio en equilibrio el mismo?
- ¿Es óptimo para el subastador en el sentido de maximizar su ingreso esperado?

- ¿Bajo que condiciones son estos mecanismo eficientes en el sentido de Pareto. Si no lo es, ¿Cuál es la pérdida en eficiencia por utilizar una subasta como mecanismo de asignación? En la literatura especializada este problema se conoce como el precio de la anarquía.
- ¿Tiene el agente incentivos para participar de ese mecanismo de asignación de recursos (se conoce como racionalidad individual)?
- ¿Cuáles son los incentivos a coludir de los particpantes?
- ¿ Son las reglas del mecanismo sencillas y fáciles de entender? Esto puede ser fundamental para incentivar la participación de agentes.
- ¿Es posible a partir de los datos observados, ofertas, asignaciones, precios de equilibrio, etc., identificar los fundamentales del modelo?
- ¿Es posible refutar la implicaciones de la teoría ?

10.1.1. El modelo básico de subastas

El modelo estándar tiene la siguiente estructura. Estructura de información independiente y simétrica, estructura de valoración privada y agentes neutros al riesgo. En particular, agentes simétricos (esto tiene dos componentes: información y valoración). El modelo estándar se puede representar como un juego de información incompleta con la siguiente estructura:

$$BG = (I, (R_+)_{i\in I}, [0,\omega], (\pi_i)_{i\in I}, F)$$

donde $I = \{1, ..., N\}$ es un conjunto de jugadores y el conjunto de acciones es el mismo para todos: $A_i = R_+$. El supuesto de estructura de información independiente lo formalizamos de la siguiente forma: el conjunto de información es el mismo para todos: $T_i = [0,\omega]$. En este caso interpretamos el conjunto de información como la valoración privada del objeto que tiene el agente. Suponemos que la función de probabilidad sobre el conjunto de información $T = [0,\omega]^I$ que caracteriza los juegos Bayesianos es de la forma F^N donde F es una distribución de probabilidad sobre $[0,\omega]$ y que esta tiene densidad f. Aquí nos alejamos ligeramente de la notación introducida en las notas anteriores donde F era la distribución sobre T. Sin embargo, como forma de recordar este caso especial, obsérvese que en la especificación del juego Bayesiano sólo especificamos un conjunto de información $[0,\omega]$ y una sola función de distribución F sobre $[0,\omega]$.

La interpretación es la siguiente. En el modelo estándar de subastas el jugador i utiliza la densidad $\prod_{j\neq i} f = f^{n-1}$para evaluar la información de los demás agentes.

Este supuesto quiere decir que la información de los jugadores es independiente. En particular, la información es puramente privada y no afecta cómo los demás cuantifican su propia información.

Por último, $\pi_i : R_+^I \times [0,\omega]^I \to R$ es el pago de cada jugador y su forma específica depende del tipo de subasta que estemos considerando. Cuando π_i no depende de t_{-i} decimos que la subasta es de valores privados. Específicamente suponemos que el pago de cada jugador es de la forma $\pi_i(b_i, b_{-i}, t_i) = t_i - l_i(b_i, b_{-i})$ donde $l_i(b_i, b_{-i})$ representa la transferencia de cada jugador al subastador. Esta representación de la función de pagos pone en evidencia las hipótesis de valoraciónón privada y neutralidad al riesgo.

Para resumir, utilizaremos T para denotar el conjunto de información $[0,\omega]^I$ y F^n para denotar la función de distribución sobre T.

10.1.2. Subasta al segundo precio

En esta subasta cada agente observa su valoración $t_i \in T_i = [0,\omega]$ y escribe en un sobre su oferta por el bien. Gana el jugador que más ofrezca y paga la segunda oferta más alta. En caso de empate se asigna el objeto aleatoriamente entre los ganadores (y paga el valor ofertado).

El payoff de los agentes es:

$$\begin{aligned}
\pi_i &: R_+^I \times [0,\omega]^I \to R \\
\pi_i(b_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) &= t_i - \max_{j\neq i}\{b_j\} \text{ si } b_i > \max_{j\neq i}\{b_j\} \\
\pi_i(b_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) &= 0 \text{ si } b_i < \max_{j\neq i}\{b_j\}
\end{aligned}$$

La expresión del payoff pone en evidencia algunos de los supuestos que hicimos anteriormente (valoración privada y neutralidad al riesgo).

Proposición 8. En la subasta al segundo precio la estrategia de revelar la verdadera valoración es un equilibrio en estrategias dominantes (débilmente).

Prueba. Una estrategia para cada jugador es una función $\mathbf{b}_i : [0,\omega] \to R_+$. Vamos a demostrar que la estrategia de revelar la verdad para cada jugador, $\mathbf{b}^{II}(t_i) = t_i$, es un equilibrio en estrategias dominantes (débilmente).

Supongamos que cada agente observa su valoración privada y hace una oferta por el bien. Fijemos un agente, digamos el agente i y concentremonos en su estrategia. Sea $Y_1 = \max_{j \neq i} \{b_j\}$. Y_1 determina si el agente i gana o no.

Primero algunas observaciones: $\mathbf{b}_i(t_i) > t_i$ no es racional (en el sentido débil) pues la estrategia $\overline{\mathbf{b}}_i$ que es igual $\mathbf{b}_i$ en todas partes excepto en t_i, donde es revelar la verdadera valoración, la domina débilmente - cuando la valoración es t_i, el payoff del agente nunca es menor y con probabilidad positiva es mayor.

El argumento es independiente de las estrategias utilizadas por los demás jugadores.

Si $\mathbf{b}_i(t_i) < t_i$ pueden suceder tres cosas:

Casos	Payoff		
	Resultado	Estrategia $\mathbf{b}_i$	Estrategia $\mathbf{b}^{II}$
$Y_1 \leq b_i < t_i$	i gana	$t_i - Y_1$	$t_i - Y_1$
$b_i < Y_1 < t_1$	i pierde	0	$t_i - Y_1$
$b_i < t_1 \leq Y_1$	i pierde	0	0

Comparando con el resultado que hubiera tenido de utilizar la estrategia de revelar la verdad es claro que ésta última la domina. Formalmente lo que hemos hecho es demostrar que la estrategia $\mathbf{b}^{II}(t_i) = t_i$ domina a cualquier otra estrategia $\mathbf{b}_i$. Esto es:

$$\pi_i(t_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) \geq \pi_i(\mathbf{b}_i\,(t_i)\,, b_{-i}, t_i, t_{-i})$$

para todo $t \in T$ y b_{-i} ■

Obsérvese que en ninguna parte utilizamos la estructura de información y que la estrategia es la misma para cada jugador. Esto es lo que se conoce como un equilibrio simétrico. Este equilibrio es independiente de la estructura de información y de que el espacio de valoración sea $[0, \omega]$. En particular, vale aún en el caso en que la información sea correlacionada o en el que los conjuntos de información son diferentes. Adicionalmente, el resultado no depende de la aversión al riesgo de los participantes.Esta subasta es eficiente desde el punto de vista social.

Para avanzar más en la propiedades de estos mecanismos de signación necesitamos un conocimiento mínimo del concepto de esperanza condicional. Para nosotros es suficiente lo siguiente. La esperanza condicional de una variable aleatoria X con valores en los números reales, dado un conjunto $\{X \leq x\}$,

$E[X|X \leq x]$, se define como:

$$E[X|X \leq x] = \frac{1}{F(x)} \int_0^x y f(y) dy \tag{10.1}$$

donde F es la función de distribución de X y f es la densidad de F. Con esta defininción podemos estudiar el pago esperado de la subasta en equilibrio.

El *pago esperado* (pago esperado interim en este equilibrio) de un agente con valoración t, $m^{II}(t)$ es:

$$m^{II}(t) = G(t) E_{-i}\left[Y_1 \mid t > Y_1\right]$$

donde $G(t)$ es a probabilidad de ganar (la probabilidad que el agente le atribuye al conjunto $[t > Y_1]$, es decir, la distribución de Y_1) y $E_{-i}\left[Y_1 \mid t > Y_1\right]$ es el pago esperado del agente dado que es ganador).

La estrategia de revelar la verdadera valoración es un equilibrio en estrategias dominantes (débiles). Esto quiere decir que si eliminamos las estrategias dominadas débilmente seleccionaríamos este equilibrio. Sin embargo, existen otro tipo de equilibrios que, aunque extraños, podrían ser pasados por alto sin ninguna relfexión sobre su significado. Por ejemplo, supongamos que los agentes utilizan las siguientes estrategias:

$$\begin{aligned} b_i &= w \\ b_{-i} &= 0 \end{aligned}$$

Es fácil ver que estas estrategias son un equilibrio expost y, en particular, son un equilibrio de Nash Bayesiano.

10.1.3. Subasta al primer precio

En esta subasta los agentes observan su valoración (información) y hacen una oferta. Gana el que oferte más alto y paga lo ofertado. En caso de empate, el bien se asigna aleatoriamente.

El payoff de los agentes es:

$$\begin{aligned} \pi_i &: R_+^I \times [0, \omega]^I \rightarrow R \\ \pi_i(b_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) &= t_i - b_i \text{ si } b_i > \max_{j \neq i} \{b_j\} \\ \pi_i(b_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) &= 0 \text{ si } b_i < \max_{j \neq i} \{b_j\} \end{aligned}$$

Obsérvese que existe un compromiso claro (*trade-off*) entre ofertar alto (aumenta la probabilidad de ganar) y el pago (disminuye el payoff). Intuitivamente, esto implica que la oferta óptima de cada agente debe ser menor que su valoración. Este compromiso no existe en la subasta al segundo precio y por eso en esta subasta los agentes pujan hasta su valoración.

Nos vamos a concentrar en el equilibrio simétrico. En este caso no existe un equilibrio en estrategias dominantes. Vamos a caracterizar el equilibrio de Nash-Bayesiano. Supongamos que i tiene una valoración t_i y ofrece $b_i \in R_+$. Supongamos que todos los jugadores $j \neq i$ utilizan una estrategia $\mathbf{b}^I$ diferenciable y creciente. Es claro que $b_i \leq \mathbf{b}^I(\omega)$ (de lo contrario ganaría con seguridad, pero también ganaría con seguridad reduciendo su oferta un poco). También es fácil de ver que si $t_i = 0$ entonces $b_i = 0$ y $\mathbf{b}^I(0) = 0$ (pues en caso de ofertar positivo y ganar, el payoff sería negativo).

Ahora, el conjunto de valoraciones de los demás agentes para las cuales i gana es el siguiente.

$$\left\{b_i > \max_{j \neq i} \left\{\mathbf{b}^I(t_j)\right\}\right\} = \left\{b_i > \mathbf{b}^I(Y_1)\right\} = \left\{\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i) > Y_1\right\}$$

Denotamos por G la distribución de Y_1 (Y_1 es la valoración más alta entre las de los demás agentes). Si la estructura de información es independiente y simétrica tenemos que $G = F^{N-1}$ y su densidad g es $g = (N-1)\,F^{N-2} f$. Entonces la probabilidad de ganar con una oferta b_i es la probabilidad que i le atribuye al conjunto:

$$\left\{b_i > \max_{j \neq i} \left\{\mathbf{b}^I(t_j)\right\}\right\}$$

que es:

$$G(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i))$$

Por lo tanto el payoff (interim) del jugador i se puede escribir como:

$$E_{-i}[\pi_i \mid T_i = t_i] = G(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i))(t_i - b_i)$$

Las condiciones de primer orden con respecto a b_i son:

$$\frac{g(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i))}{\frac{d\mathbf{b}^I\left(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i)\right)}{dt_i}}(t_i - b_i) - G(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i)) = 0$$

Ahora, si existe un equilibrio simétrico entonces $\mathbf{b}^I(t_i) = b_i$ y las CPO se reducen a:

$$\begin{aligned}
\frac{g(t_i)}{\frac{d\mathbf{b}^I(t_i)}{dt}}(t_i - b_i) - G(t_i) &= 0 \\
&\Rightarrow \\
\frac{d\left(G(t_i)\mathbf{b}^I(t_i)\right)}{dt_i} &= tg(t_i) \\
&\Rightarrow \\
\mathbf{b}^I(t_i) &= \frac{1}{G(t_i)}\int_0^{t_i} yg(y)dy \\
&= E[Y_1|Y_1 < t_i].
\end{aligned}$$

Es fácil mostrar que en efecto $\mathbf{b}^I$ es un equilibrio creciente simétrico:

Primero, obsérvese que $\mathbf{b}^I$ es creciente y diferenciable. Vamos a demostrar que no existen incentivos a desviarse de esa estrategia. Supongamos que el jugador i tiene una valoración t y supongamos que ofrece b donde $\mathbf{b}^I(z) = b$. Es decir, el ofrece como si su valoración fuera z.[2] El payoff esperado es:

$$\begin{aligned}
E_{-i}[\pi_i(b, \mathbf{b}^I_{-i}(T_{-i}), t, T_{-i})] &= G(z)(t - \mathbf{b}^I(z)) \\
&= G(z)t - G(z)\mathbf{b}^I(z) \\
&= G(z)t - \int_0^z yg(y)dy \\
&= G(z)(t - z) + \int_0^z G(y)dy
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
& E_{-i}[\pi_i(\mathbf{b}^I(t), \mathbf{b}^I_{-i}(T_{-i}), t, T_{-i})] - E_{-i}[\pi_i(\mathbf{b}^I(z), \mathbf{b}^I_{-i}(T_{-i}), t_i, T_{-i})] \\
= \; & G(z)(z - t) - \int_t^z G(y)dy \\
\geq \; & 0.
\end{aligned}$$

Utilizando la definición de esperanza condicional, la estrategia $\mathbf{b}^I$ se puede escribir como:

$$\mathbf{b}^I(t) = E_{-i}[Y_1 \mid Y_1 < t]$$

[2]Esta forma de replantear el problema es lo que se conoce como el mecanismo directo asociado a la subasta al primer precio.

$$\mathbf{b}^{I}\left(t\right) = t - \int_{0}^{t} \frac{G(y)}{G(t)} dy < t.$$

Es decir, la oferta óptima está estrictamente por debajo (cuando $t > 0$) de la verdadera valoración.

El *pago esperado* de un agente con valoración t, $m^{I}(t)$ es:

$$\begin{aligned} m^{I}(t) &= G(t)E_{-i}\left[Y_1 \mid t > Y_1\right] \\ &= m^{II}(t) \end{aligned}$$

Obsévese que $m^{I}(t) = m^{II}(t)$. Este es un caso particular del

teorema de equivalencia del ingreso esperado para el subastador que estudiaremos de forma más general en las próximas secciones.

Por último, obsérvese que subasta es eficiente desde el punto de vista social: el bien es asignado al que más lo valora.

Ejemplo 10.1 (Información uniforme)**.** Si la estructura de información es uniforme en $[0, 1]$ entonces

$$\mathbf{b}^{I}\left(t\right) = \frac{N-1}{N} t.$$

Ejemplo 10.2 (Información exponencial)**.** Si la estructura de información es exponencial en $[0, \infty)$, $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ para algún $\lambda > 0$ y si solo hay dos agentes ($N = 2$) entonces

$$\mathbf{b}^{I}\left(t\right) = \frac{1}{\lambda} - \frac{t\exp(-\lambda t)}{1 - t\exp(-\lambda t)}.$$

10.1.4. Subastas abiertas y la relación entre los diferentes formatos de subastas

La subasta al primer precio y la subasta holandesa son estratégicamente equivalentes. Además, este resultado es independiente de la estructura de información, valoración o actitud frente al riesgo. Por eso decimos que es una equivalencia fuerte. Informalmente, para ver esto pensemos en el problema estratégico que engrenta un agente cuando participa de una subasta holandesa. El agente puede obervar el precio anunciado en todo momento y no tiene incentivos a levantar su mano hasta tanto el precio no llegue a su valoración. A partir de ese momento debe evaluar dos cosas: si levanta la mano rápido su probabilidad de ganar aumenta pero el pago neto es bajo. Si espera un poco, la probabilidad de ganar disminuye (más participantes están esperando el momento para levantar la mano) pero el pago neto aumenta. Esta es exactamente la situacion estratégica que enfrenta un agente en la subasta al primer precio. Ahora obérvese que en la medida que va disminuyendo el precio, este es poco informativo para los agentes de la información privada de los demás pues, los demás puede ser que no levanten la mano porque tienen una valoración baja o quieren aumentar su pago neto esperando lo suficiente.

Ahora, bajo el supuesto de valores privados, la subasta inglesa es equivalente a la subasta al segundo precio. Sin embargo, la equivalencia no es estratégica (la estructura de valoración es importante). Por ello decimos que la equivalencia es débil. De forma análoga al caso anterior, obsérvese que mientras va subiendo el precio y se observa que algunos agentes bajan su mano manifestando retirarse de la competencia, esta información revela que los participantes tiene es valoración y, por lo tanto, si la subasta no fuera de valores privados esto iría cambiando la valoración que tiene los demás del objeto subastado.

10.1.5. Equivalencia del ingreso esperado para el subastador

Supongamos que estamos bajo las condiciones del modelo estándar. Además, supongamos que el pago esperado de un jugador con valoración privada cero, es cero (lo que sucede, por ejemplo, bajo los cuatro formatos de subastas estándar).

Teorema 10.3 (Teorema de Equivalencia del Ingreso para el Subastador)**.** Bajo las condiciones enunciadas arriba, cualquier equilibrio simétrico creciente genera el mismo ingreso esperado para el subastador.

Prueba. Sea $m^A(t)$ el pago esperado de un individuo con valor t en una subasta A y $\mathbf{b}^A(t)$ un equilibrio creciente simétrico. Por hipótesis $m^A(0) = 0$. El payoff esperado del jugador que reporta $\mathbf{b}_i^A(z)$ (como si su valoración hubiera sido z) es:

$$E_{-i}[\pi_i(\mathbf{b}_i^A(z), \mathbf{b}_{-i}^A(T_{-i}), t, T_{-i})] = G(z)t - m^A(z).$$

Las condiciones de primer orden con respecto a z evaluadas en $z = t$ son:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{dm^A(y)}{dy} & = & yg(y) \\ & \Longrightarrow & \\ m^A(t) & = & G(t)E_{-i}[Y_1 \mid Y_1 < t]. \end{array}$$

Lo que muestra que el pago esperado de cada jugador es independiente del mecanismo particular de la subasta. ■

El teorema se puede extender al caso en que los agentes tienen valoraciones interdependientes. Ahora, obsérvese que la demostración depende de que los agentes son neutros al riesgo.

Ejemplo 10.4. Si la estructura de información es uniforme en $[0,1]$ entonces

$$m^A(t) = \frac{N-1}{N} t^N$$

y el ingreso esperado del subastador, $E[R^A]$ es:

$$E[R^A] = NE[m^A] = \frac{N-1}{N+1}$$

Por último, algunas observaciones: Si el subastador es averso al riesgo, él prefiere la subasta al primer precio que al segundo precio. La subasta al segundo precio genera ingresos más volátiles. En la subasta al segundo precio las ofertas están en $[0,w]$. En la subasta al primer precio están en $[0, E[Y_1 \mid Y_1 < t]] \subset [0, E[Y_1]]$.

El teorema de equivalencia de ingresos para el subastador puede ser utilizado para calcular las ofertas de equilibrio en la subasta todos pagan, guerra del desgaste, subasta al tercer precio e incertidumbre en el número de jugadores (véase Krishna (2009)).

10.1.6. Precio reserva

Supongamos que el subastador anuncia un precio mínimo al que está dispuesto a vender el objeto y consideremos primero la subasta al el segundo precio. En este caso los agentes hacen sus oferta y gana el que más oferta siempre y cuando esa oferta sea superior al precio de reserva, de lo contrario el subastador se queda con el objeto. Cuando hay un ganador, este paga el máximo entre la oferta la segunda oferta más alta y el precio de reserva. En esta subasta al segundo precio con precio de reserva sigue siendo cierto que la estrategia de revelar la verdad es un equilibrio en estrategias dominantes (débilmente). Independientemente de lo que los demás hagan, si la valoraciónón es mayor o igual que el precio de reserva es óptimo revelar la valoración. Si es menor, no hay ninguna posibilidad de obtener un pago neto positivo. En este caso revelar la verdad es indiferente para el agente.

Sea F_r la distribución de la variable aleatoria $max\{r, Y_1\}$. El pago esperado, $m^{II}(t,r)$ de un agente con valoración t en una subasta con precio de reserva $r \leq t$ es:

$$\begin{aligned} m^{II}(t,r) = P(t > max\{t, Y_1\}) E_{-i} \left[max\{r, Y_1\} \mid x > max\{r, Y_1\} \right] \\ = \int_0^t y dF_r = \int_0^r y dF_r + \int_r^t y dF_r \\ = \int_0^r y dF_r + \int_r^t y dG \\ = rG(r) + \int_r^t y dG \\ = rG(r) + \int_r^t y g(y) dy \end{aligned}$$

Obsérvese que cuando $t = r$:

$$m^{II}(r,r) = G(r)r$$

Un análisis similar al que realizamos anteriormente para la subasta el primer precio, permite demostrar que, en la subasta al primer precio con precio de reserva, cuando $t \geq r$ la estrategia

$$b^I(t,r) = E_{-i} \left[\text{máx} \{r, Y_1\} \mid t > Y_1 \right]$$

es un equilibro de Nash - Bayesiano. Obsérvece que como $t \geq r$ entonces: $b^I(t,r) = E_{-i} \left[\text{máx} \{r, Y_1\} \mid t > \text{máx} \{r, Y_1\} \right]$ luego el pago esperado en la subasta al primer precio con precio de reserva es:

$$m^I(t,r) = P(t > max\{r, Y_1\}) b^I(t,r) = \tag{10.3}$$

$$P(t > max\{r, Y_1\}) E_{-i} \left[\text{máx} \{r, Y_1\} \mid t > \text{máx} \{r, Y_1\} \right] = m^{II}(t,r) \tag{10.4}$$

Obsérvese que:

$$m^I(t,r) = m^{II}(t,r)$$

luego, el ingreso esperado del subastador es el mismo aún con precios de reserva.

Estudiemos ahora cuál es el efecto del precio de reserva sobre el ingreso esperado el subastador. Sea t_0 la valoración que el subastador tiene del objeto (hasta este punto habiamos hecho el supuesto de que era cero, pero esto no es necesario). Entonces el ingreso esperado para el subastador es:

$$NE[m^A(t,r)] + F(r)^N t_0$$

donde A es la subasta al primer precio o segundo precio. No es dificil mostrar que el precio de reserva r^* que maximiza el ingreso esperado del subastador satisface:

$$r^* - \frac{1}{\lambda(r^*)} = t_0$$

donde $\lambda(r^*) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$.

Obsérvese que $r^* > t_0$, luego es óptimo para el subastador poner un precio de reserva superior a su valoración. En particular, de esta forma el subastador va a excluir de la subasta a jugadores con valoraciones inferiores a su precio de reserva aún cuando éstos tengan valoraciones superiores a su propia valoración t_0. Esto se conoce como el principio de exclusión y hace que la subasta óptima sea ineficiente. Obsérvese que el precio de reserva depende de la estrutura de información de los jugadores. En este sentido la subasta con precio de reserva óptimo no es libre de detalles y en la práctica es muy difícil conocer el precio de reserva óptimo.

Ejercicio 10.5. ¿Por qué el teorema de equivalencia del ingreso esperado para el subastador no aplica para subastas con diferentes valores del precio de reserva?

Ejercicio 10.6. Supongamos que solo hay dos agentes, la valoración para el subastador es cero y la estructura de información es uniforme en $[0, 1]$. Muestre que $r^* = \frac{1}{2}$ y $E\left[m^A(T, r)\right] = \frac{5}{12}$.

Un instrumento alternativo para aumetar los ingresos del subastador es poner una cuota de participación. Esta tiene el mismo efecto que el precio de reserva.

10.2. Ejercicios

1. Subastas. Considere el modelo estándar de subastas excepto que los agentes no son neutros al riesgo pero tienen una misma función de utilidad que es estrictamente monótona. Demostrar que en la subasta al segundo precio decir la verdadera valoración es una estrategia débilmente dominante.