

# Introducción a las Subastas de Múltiples Unidades

Alvaro J. Riascos Villegas

Mayo de 2020

# Contenido

- 1 **Introducción**
- 2 Modelo
- 3 Ejemplos
- 4 Equilibrio: Subasta de Vickrey
- 5 Subasta Holandesa e Inglesa
- 6 Subasta de Ausubel
- 7 Subasta generalizada de segundo precio (GSP)

# Introducción

- Los principales formatos son:
  - 1 Discriminatoria (cerrada) y Holandesa (abierta)
  - 2 Uniforme (cerrada) y Inglesa (abierta)
  - 3 Vickrey (cerrada) y Ausubel (abierta)

# Contenido

- 1 Introducción
- 2 Modelo**
- 3 Ejemplos
- 4 Equilibrio: Subasta de Vickrey
- 5 Subasta Holandesa e Inglesa
- 6 Subasta de Ausubel
- 7 Subasta generalizada de segundo precio (GSP)

# Modelo

- Consideramos subastas simultáneas de múltiples unidades del mismo bien.
- Suponemos que no hay complementaridades entre los objetos: La valoración marginal de ganar un segundo objeto es menor que la del primer objeto.
- Vamos a considerar los tres formatos más importantes para subastar  $K$  objetos idénticos: discriminatoria, Vickrey y uniforme.
- Cada jugador debe mandar  $K$  ofertas  $b_k^i$  que satisfacen  $b_1^i \geq b_2^i \geq \dots, \geq b_K^i$ .
- $b_j^i$  es la disponibilidad de  $i$  a pagar por la  $j$  ésima unidad.

- Sea  $c : \mathbb{R}_+^{KI} \rightarrow \mathbb{R}_+^{KI}$  el vector ordenado (de mayor a menor) de las  $I \times K$  ofertas.
- Sea  $c^{-i} : \mathbb{R}_+^{KI} \rightarrow \mathbb{R}_+^{K(I-1)}$  el vector de  $K \times (I - 1)$  de ofertas ordenado (de mayor a menor) que enfrenta  $i$ .
- $c_k^{-i}$  es la  $k$ -ésima oferta más alta que enfrenta  $i$ .
- Regla de asignación: Si  $i$  tiene exactamente  $k \leq K$  de la  $K$  ofertas más altas (entonces se le asignan  $k$  objetos), es decir si (por simplicidad suponemos que no hay empates)  
 $b_k^i > c_{K-k+1}^{-i}$  y  $b_{k+1}^i < c_{K-k}^{-i}$ .
- En caso de empate por una unidad, se asigna con la misma probabilidad a los agentes que empatan.

- Esta estructura es común a los tres tipos de subastas que vamos a considerar.
- La diferencia entre ellas se debe a la regla de asignación (en particular, la componente que determina el pago esperado de cada agente).
- En la subasta discriminatoria si el agente  $i$  gana exactamente  $k^i$  unidades entonces paga,  $\sum_{k=1}^{k^i} b_k^i$ .
- Obsérvese que cuando  $K = 1$  es la subasta al primer precio.

- En la subasta uniforme todas las unidades son vendidas al precio que agota la oferta y la demanda (precio de equilibrio).
- Suponemos que este precio es el más alto perdedor
- Puesto que  $i$  gana exactamente  $k^i > 0$  unidades si y sólo si:

$$b_{k^i}^i > c_{K-k^i+1}^{-i} \text{ y } b_{k^i+1}^i < c_{K-k^i}^{-i}$$

Entonces la oferta más alta perdedora es:

$$p(b) = \text{máx} \left\{ b_{k^i+1}^i, b_{K-k^i+1}^{-i} \right\}$$

- O, alternativamente

$$p(b) = \text{máx} \left\{ b_{k^i+1}^i, c_{K-k^i+1}^{-i} \right\}$$

- Luego, cada agente paga por cada unidad ganada  $p(b)$ .
- Obsérvese que cuando  $K = 1$  ésta se reduce al a subasta al segundo precio. Sin embargo NO es una generalización apropiada a múltiples unidades.



- En la subasta de Vickrey  $i$  gana exactamente  $k^i > 0$  unidades si y sólo si:

$$b_{k^i}^i > c_{K-k^i+1}^{-i} \text{ y } b_{k^i+1}^i < c_{K-k^i}^{-i}$$

y paga por la  $k$  ésima unidad  $c_{K-k^i+k}^{-i}$ .

- Luego su pago total es:

$$\sum_{k=1}^{k^i} c_{K-k^i+k}^{-i}$$

- La subasta de Vickrey es la generalización apropiada de la subasta al segundo precio.

# Contenido

- 1 Introducción
- 2 Modelo
- 3 Ejemplos**
- 4 Equilibrio: Subasta de Vickrey
- 5 Subasta Holandesa e Inglesa
- 6 Subasta de Ausubel
- 7 Subasta generalizada de segundo precio (GSP)



## Example

Ofertas y ordenamiento:

$$b^1 = (50, 47, 40, 32, 15, 5)$$

$$b^2 = (42, 28, 20, 12, 7, 3)$$

$$b^3 = (45, 35, 24, 14, 9, 6)$$

$$c = \left( \underset{1}{50}, \underset{1}{47}, \underset{3}{45}, \underset{2}{42}, \underset{1}{40}, \underset{3}{35}, 32, \dots \right)$$

Las seis más altas son las ganadoras. Por lo tanto el agente 1 gana 3 unidades, el agente 2 gana 1 unidad y el agente 3 gana 2 unidades. El precio de cierre es 32 (el más alto perdedor).

## Example

En el ejemplo anterior:

$$c_3^{-1} = 35, \quad c_4^{-1} = 28$$

y el agente 1 gana exactamente 3 unidades porque:

$$b_3^1 = 40 > c_4^{-1} = 28$$

$$b_4^1 = 32 < c_3^{-1} = 35$$

y el precio de cierre es:

$$p = \max \{ b_4^1, c_4^{-1} \} = \max \{ 32, 28 \} = 32$$

## Example

El pago en la subasta de Vickrey para el agente 1 es:

$$c_4^{-1} + c_5^{-1} + c_6^{-1} = b_2^2 + b_3^3 + b_3^2$$

# Contenido

- 1 Introducción
- 2 Modelo
- 3 Ejemplos
- 4 Equilibrio: Subasta de Vickrey**
- 5 Subasta Holandesa e Inglesa
- 6 Subasta de Ausubel
- 7 Subasta generalizada de segundo precio (GSP)

# Subasta de Vickrey

- En la subasta de Vickrey es un equilibrio en estrategias dominantes (débil) revelar la verdadera valoración,  $b^V(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$ .
- En particular, la subasta de Vickrey asigna de forma eficiente.
- Como veremos en la demostración el argumento no depende de que los agentes sean simétricos.
- Obsérvese que el pago del agente no depende de su oferta sino solamente de  $b^{-i}$  y del número de unidades ganadas.
- Sea  $k^i$  el número de unidades que el gana cuando oferta  $b^i$  y los demás ofertan  $b^{-i}$ .



- Un agente nunca ofertará por ninguna unidad por encima de su valoración.
- Supongamos que por la unidad  $k$  el agente oferta más (escojamos  $k$  como el mayor número para el que esto pasa); considere la oferta que se diferencia de la anterior solo en la unidad  $k$  en donde es la verdadera valoración.
- Con esta oferta el gana el mismo número de unidades o menos. Si gana el mismo entonces es indiferente entre ambas.
- Si gana menos quiere decir que  $x_k^i \leq c_{K-k+1}^{-i}$  y  $k = k^i$ , es decir  $k$  era su última ganadora antes de cambiar la oferta (si  $k < k^i$  entonces no puede ser que pierda la unidad  $k$  pero gane la  $k + 1$ ).

- El excedente por las unidades que gana sigue siendo el mismo. Ahora, para la unidad  $k^i$  deja de percibir un excedente de  $x_{k^i}^i - c_{K-k^i+1}^{-i} \leq 0$ . Luego en efecto al ganar menos unidades aumenta su excedente.
- Luego ofertar sinceramente domina débilmente a cualquier que oferta más que su valoración por una unidad. Claramente ofertar menos que la verdadera valoración está dominada por la oferta sincera.

- La subasta de Vickrey puede resultar en asignaciones 'injustas'.
- Supongamos que  $K = 2$ ,  $x^1 = (10, 6)$ ,  $x^2 = (9, 2)$ . En este caso, cada agente se lleva una unidad.

# Contenido

- 1 Introducción
- 2 Modelo
- 3 Ejemplos
- 4 Equilibrio: Subasta de Vickrey
- 5 Subasta Holandesa e Inglesa**
- 6 Subasta de Ausubel
- 7 Subasta generalizada de segundo precio (GSP)

## Subasta Holandesa e Inglesa

- En la Holandesa se comienza con un precio bien alto y la personas revelan su demanda. El precio va disminuyendo hasta que la demanda sea mayor que cero. Se entregan las unidades demandadas a ese precio y se continua bajando el precio hasta que otra vez la demanda sea mayor que cero. Se continua de esta forma hasta agotar todas las unidades (análogo a la subasta discriminatoria).
- En la Inglesa se comienza con un precio muy bajo en el que la demanda excede a la oferta. Se sube el precio hasta que por primera vez la oferta excede la demanda. En ese momento se asignan todas las unidades y se paga el precio inmediatamente anterior al que la oferta es igual a la demanda (análogo a subasta de precio uniforme).

# Contenido

- 1 Introducción
- 2 Modelo
- 3 Ejemplos
- 4 Equilibrio: Subasta de Vickrey
- 5 Subasta Holandesa e Inglesa
- 6 Subasta de Ausubel**
- 7 Subasta generalizada de segundo precio (GSP)

## Oferta residual

- Primero definimos la oferta residual que nos permite describir el precio de cierre de forma conveniente.
- La oferta residual se define como: residual que enfrenta el agente  $i$ ,

$$s^{-i}(p) = \max \left\{ K - \sum_{j \neq i} d^j(p), 0 \right\}$$

- El precio de cierre (el más alto perdedor) se puede definir como el más alto tal que:

$$s^{-i}(p) < d^i(p)$$

# Subasta de Ausubel

- Es una subasta alternativa a la inglesa de precio ascendente.
- Comenzando con un precio muy bajo  $p = p_0$ ,  $s^{-i}(p_0) = 0$ .
- La siguiente ronda  $p = p_1$  y aún  $s^{-i}(p_1) = 0$ .
- El proceso continua hasta que por primera vez, en la ronda  $n_1$ , para algún  $i_1$ ,  $s^{-i_1}(p_{n_1}) > 0$ . El agente  $i_1$  gana las primeras  $s^{-i_1}(p_{n_1})$  unidades y paga  $p_{n_1}$  por unidad. Si la condición se cumple para varios agentes, a cada uno se le da las unidades correspondientes.



- El proceso continua hasta que por la primera vez, en la ronda  $n_2$ , para algún agente  $i_2$ ,  $s^{-i_2}(p_{n_2}) > s^{-i_2}(p_{n_1})$ . El agente  $i_2$  gana las primeras  $s^{-i_2}(p_{n_2}) - s^{-i_2}(p_{n_1})$  unidades y paga  $p_{n_2}$  por unidad. Si la condición se cumple para varios agentes, a cada uno se les da las unidades correspondientes.

# Subasta de Ausubel: Ejemplo

- Se tiene 5 licencias y 5 participantes, cada participante se le pueden otorgar máximo tres licencias.

TABLE 1—BIDDER VALUATIONS IN ILLUSTRATIVE EXAMPLE

	Bidder A	Bidder B	Bidder C	Bidder D	Bidder E
Marginal value (1 unit)	123	75	125	85	45
Marginal value (2 units)	113	5	125	65	25
Marginal value (3 units)	103	3	49	7	5

# Subasta de Ausubel: Ejemplo

Price	Bidder A	Bidder B	Bidder C	Bidder D	Bidder E
49	3	1	2	2	0

# Subasta de Ausubel: Ejemplo

Price	Bidder A	Bidder B	Bidder C	Bidder D	Bidder E
65	3	1	2	1	0

- Jugador A gana 1 unidad.

# Subasta de Ausubel: Ejemplo

Price	Bidder A	Bidder B	Bidder C	Bidder D	Bidder E
75	3	0	2	1	0

- Jugador A gana 1 unidad adicional.
- Jugador C gana 1 unidad.

# Subasta de Ausubel: Ejemplo

Price	Bidder A	Bidder B	Bidder C	Bidder D	Bidder E
85	3	0	2	0	0

Jugador A gana 1 unidad adicional.

Jugador C gana 1 unidad adicional.

# Subasta de Ausubel: Ejemplo

	Bidder A	Bidder B	Bidder C	Bidder D	Bidder E
Units won	3	0	2	0	0
Payments	65+75 +85	0	75+85	0	0

# Contenido

- 1 Introducción
- 2 Modelo
- 3 Ejemplos
- 4 Equilibrio: Subasta de Vickrey
- 5 Subasta Holandesa e Inglesa
- 6 Subasta de Ausubel
- 7 Subasta generalizada de segundo precio (GSP)



## Subasta generalizada de segundo precio

- Los anunciantes ofertan cuanto están dispuesto a pagar por click (una única oferta) por búsquedas de ciertas palabras claves.
- Se ordenan las ofertas de mayor a menor y de esa forma se asignan los espacios.
- Cada anunciante paga el costo de la oferta del anunciante inmediatamente debajo.
- GSP no es reveladora de las verdaderas disponibilidades a pagar por click.
- Tiene múltiples equilibrios de Nash y algunos no son óptimos.
- Sin embargo, existe por lo menos un equilibrio óptimo.

# Subasta generalizada de segundo precio

Supongamos que hay tres espacios publicitarios para ser vendidos y tres compradores de ciertas palabras clave. Los espacios los denotamos por  $a, b, c$  y estos tienen *clickthrough rates* 10, 4 y 0 respectivamente. Denotamos los compradores por  $x, y, z$  y sus ganancias estimadas por click 7, 6 y 1 respectivamente.

- 1 Mostrar que ofertar la verdadera valoración no es un equilibrio cuando se usa la subasta generalizada de segundo precio GSP (i.e., si  $x$  reduce de forma unilateral su oferta a 5 mejora).
- 2 Mostrar que si los compradores ofertan 5, 4 y 2 respectivamente en la subasta GSP este es un equilibrio. Cuál es el ingreso del subastador?
- 3 Mostrar que si los compradores ofertan 3, 5 y 1 respectivamente en la subasta GSP este es un equilibrio. Cuál es el ingreso del subastador?