Juegos Estratégicos y sus Aplicaciones

Alvaro J. Riascos Villegas
Universidad de los Andes y Quantil
Versión 7.0, 2024

Índice general

Capítulo 0

Introducción

La teoría de juegos es el estudio de las interacciones estratégicas entre agentes racionales con diferentes objetivos. La principal característica de esta teoría es que reconoce que las decisiones de un jugador pueden afectar de forma directa los objetivos de los demás jugadores. Aquí un agente puede ser un individuo, una firma, un partido político, cualquier entidad que tome decisiones en un ambiente de múltiples agentes. Qué entendemos racional será algo que se discutira a lo largo del libro pero una definición útil para fijar ideas es simplemente agentes que tiene objetivos y buscan maximizarlos.

Podemos dividir la teoría en dos grandes ramas; la teoría de juegos estratégicos (o juegos no cooperativos) y la teoría de juegos coalicionales (o juegos cooperativos). La principal diferencia entre estos juegos es que en los juegos estratégicos los jugadores actuan en forma independiente mientras que en los juegos coalicionales se supone que los jugadores pueden hacer coaliciones, o arreglos de obligatorio cumplimiento, mediante algún mecanismo que no es explícito. En este libro nos vamos a concentrar únicamente en la teoría de juegos estratégicos.

Los juegos estratégicos se pueden representar de dos formas.

1. Forma normal, para juegos estáticos.[1]
2. Forma extensiva, para juegos dinámicos.

Los juegos en forma normal, a su vez, se pueden clasificar en juegos de información completa e incompleta. Los juegos en forma extensiva, en cambio,

[1]También se denominan juegos en forma estratégica. Sin embargo, reservamos este nombre para toda la clase de juegos estratégicos (en forma normal y extensiva).

se clasifican en juegos de información perfecta y juegos de información imperfecta. La representación de un juego en forma extensiva es la forma más general de representar un juego. En este libro vamos a comenzar estudiando los juegos estratégicos en su representación normal. La Figura 0 muestra esquemáticamnete una taxnomía de la teoría de juegos estratégicos y algunos de los ejemplos más conocidos o aplicaciones más importantes.

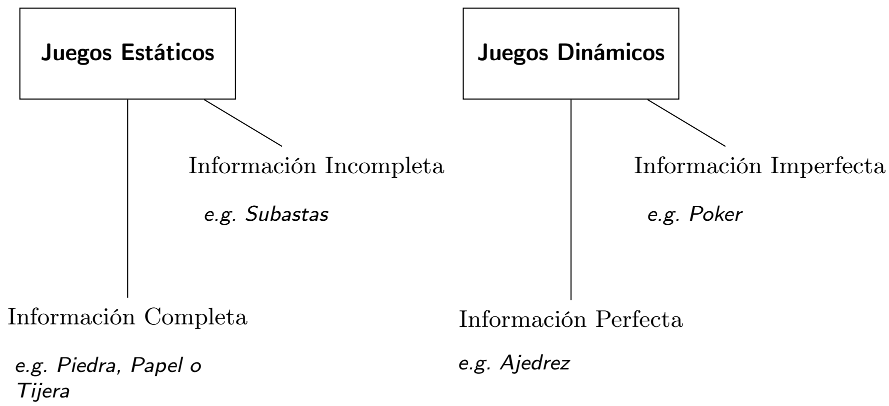


Figura 1: Taxonomía de la teoría de juegos estratégicos (i.e., no cooperativos) con algunos ejemplos o aplicaciones importantes.

Todo juego plantea un problema de decisión para los agentes involucrados por eso la teoría de juegos es el un ejemplo del estudio de la toma de decisiones con múltiples agentes. Ahora, queremos enfatizar, por lo menos informalmente, cuáles son las características más sobresalientes que intervienen en este tipo de decisiones. Por el momento, ignoramos las potenciales asimetrías de información entre los jugadores (i.e., este será uno de los temas más relevantes cuando estudiemos juegos de información incompleta). Para el caso de juegos de información completa, los elementos fundamentales son:

1. El conjunto de acciones y/o un conjunto de consecuencias.
2. Una relación de preferencia sobre las consecuencias.[2]
3. Una estructura de conocimiento (una estructura de información y el conocimiento que tienen los agentes de esta información.

[2]Usualmente, como en todos los ejemplos del libro, las preferencias se expresan sobre las acciones. Sin embargo, si se desea analizar las preferencias de forma detallada, por ejemplo, verificar si cumplen o no ciertos axiomas, lo adecuado es hacerlo sobre el espacio de consecuencias.

4. Una hipótesis de comportamiento o racionalidad.

A lo largo del libro vamos a formalizar algunas de estas ideas, especialmente 1,2 y 4, pero también tendremos alguna cosas que decir, aunque sea informalmente, sobre la importancia de la estructura de conocimiento. En efecto el conjunto de acciones es típicamente fácil de describir, al igual que las consecuencias de un perfil de acciones. Como en general las acciones determinan de forma unívoca las consecuencias, casi siempre supondremos que las preferencias dependen directamente de las acciones.

Ahora, el concepto de estructura de conocimiento es el más complejo de formalizar y por eso en este libro usaremos una aproximación intuitiva (abajo un ejemplo a manera de motivación).

Por último la hipótesis de comportamiento está intimamente relacionada con la estructura de conocimiento. Básicamente, el supuesto fundamental es que los agentes toman acciones que son las mejores posibles dada sus conjeturas sobre las acciones de los demás. Las conjeturas a su vez dependen de la estructura de conocimiento de cada uno.

La relevancia de la estructura de conocimiento en un problema de decisión se explora informalmente en la siguiente sección y será una constante a lo largo de este libro.En el siguiente ejemplo se pone de manifiesto la importancia que tiene el conocimiento que suponemos tiene un agente sobre el conocimiento que tienen los demás y viceversa.

Ejemplo 0.1 (Paradoja de los sombreros)**.** Supongamos que hay tres personas sentadas en un salón. Cada una de ellas tiene un sombrero que saben que puede ser blanco o rojo. Cada una de ellas puede observar el sombrero que los demás tienen en su cabeza, pero no el que tiene en su cabeza. Supongamos que los tres son rojos. Lo único que saben las personas es que el sombrero puede ser blanco o rojo y lo único que pueden hacer es ver el color del sombrero de los demás. Si preguntáramos uno a uno cuál es el color del sombrero que ellos tienen en su cabeza, todos responderían "no sé". Ahora, supongamos que les hacemos el siguiente anuncio: "existe por lo menos un sombrero rojo en la cabeza de ustedes", y volvemos y les preguntamos uno a uno si saben con certeza cuál es el sombrero que tienen en la cabeza. Cada uno de ellos puede oír lo que responden los anteriores. En esta ocasión los dos primeros a quienes se les pregunta responden que no saben, pero el último debería de responder que su sombrero es con seguridad rojo.

Para ver esto, obsérvese que, antes del anuncio, las tres personas saben que hay por lo menos un sombrero rojo entre los tres (dado que sabemos que los tres sombreros son rojos y cada uno puede ver el sombrero de los demás). Más aún, el tercero sabe que el segundo sabe que hay por lo menos un sombrero rojo (debido a que sabe que el primero tiene un sombrero rojo y el segundo lo puede observar). Sin embargo, antes del anuncio, el tercero no sabe que el segundo sabe que el primero sabe que hay por lo menos un sombrero rojo entre los tres. Ahora, una vez hecho el anuncio, saber que hay por lo menos un sombrero rojo entre los tres se convierte en conocimiento común: todos saben que los demás saben y todos saben que los demás saben que los otros saben, etc. En particular, el tercero sabe que el segundo sabe que el primero sabe que hay por lo menos un sombrero rojo entre los tres. Por lo tanto, dado que el primero y el segundo afirmaron no saber de qué color era el sombrero, el tercero puede deducir que su sombrero es rojo.

Para ver esto suponga que, una vez hecho el anuncio, los dos primeros responden "no sé". Ahora el tercero puede razonar así. Si mi sombrero no fuera rojo, como el segundo jugador sabe que el primero respondió no sé, entonces es porque el segundo sabe que el primero está viendo un sobrero rojo. Si el mío no es rojo, entonces el segundo jugador debería deducir que el sombrero rojo que está viendo el primer jugador es el del jugador dos, luego el jugador dos debió responder que su sombrero era rojo. Como no lo hizo, eso quiere decir que mi sombrero es rojo. Obsérvese que la clave de este argumento es que después de hecho el anuncio, el jugador tres sabe que el jugador dos sabe que el jugador uno sabe que hay por lo menos un sombrero rojo entre los tres.

En contraste con el concepto de conocimiento común, existen muchas otras formas de relajar este supuesto. Por ejemplo, puede ser que los agentes no sean conscientes de todos los elementos del juego. Es decir, el juego no es conocimiento común (un jugador desconoce que existe un tercero, desconoce todas las acciones de sus oponentes, etc.) o puede tener un conocimiento limitado (sabe algo sobre su oponente pero no sabe que su oponente sabe que él sabe), etc.

Capítulo 1

Juegos estratégicos

En este capítulo introducimos formalmente el modelo que utilizaremos para estudiar las interacciones estratégicas en un contexto estático con información completa. Este modelo se conoce como el juego en forma normal.

1.1. Juegos en forma normal

Definición 1.1 (Juego en forma normal)**.** Un juego en forma normal es una estructura $G = (N, \{S_i\}_{i=1,...,n}, \{\pi_i\}_{i=1,...,n})$ donde

1. N es un conjunto de jugadores, $N = \{1, ..., n\}$.

2. S_i es un conjunto de acciones o estrategias puras para cada jugador[1].

3. $\pi_i : \prod_{i=1}^{n} S_i \to \mathbb{R}$ es la utilidad (pago neto) de cada jugador.

Ejemplo 1.2 (Dilema de los prisioneros)**.** Sea $n = 2$, $S_1 = S_2 = \{A, C\}$. El pago neto de cada agente lo representamos mediante la siguiente tabla. La convención que vamos a utilizar es que la estrategia del jugador 1 la representan las filas, y las del jugador 2, las columnas. El pago neto del primer jugador es el primer número de cada celda, el del segundo jugador, el segundo.

[1]Más adelante, cuando estudiemos juegos dinámicos, vamos a hacer una diferenciación entre acciones y estrategias.

1\2	A	C
A	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

Ejemplo 1.3 (Batalla de los sexos)**.** Supongamos que hay dos agentes $n = 2$, $S_1 = S_2 = \{B, S\}$, $\pi_1, \pi_2 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$

M\H	B	S
B	3,2	1,1
S	0,0	2,3

Ejemplo 1.4 (Juego de conducción)**.** Supongamos que hay dos conductores que en ausencia de normas de tránsito deben decidir todos los días por cuál carril conducir su carro. Entonces $n = 2$, $S_1 = S_2 = \{D, I\}$, $\pi_1, \pi_2 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$

M\H	D	I
D	1,1	0,0
I	0,0	1,1

Obsérvese que la batalla de los sexos y el juego de conducción son juegos en los que los jugadores quisieran coordinar sus acciones para obtener un mejor pago.

Ejemplo 1.5 (Juego de revelación)**.** Los dos jugadores son un ser superior (SB) y una persona (P).[2] Las estrategias para SB son: $S_{SB} = \{RE, NRE\}$, $S_P = \{CE, NCE\}$ donde RE y NRE significan respectivamente que SB revela su existencia y que no revela su existencia, y CE, NCE significan respectivamente que P cree o no cree en su existencia.

SB\P	CE	NCE
RE	3,4	1,1
NRE	4,2	2,3

El ejemplo busca representar de forma explícita las siguientes hipótesis sobre el comportamiento e interacción entre un ser superior y un agente. Por una parte, el primer supuesto es que el principal objetivo de un ser superior es lograr que el agente crea en la existencia de un ser superior. Su segundo objetivo es que él prefiere no revelar su existencia. Por otra parte, suponemos que el primer objetivo del agente es poder validar su creencia en la existencia

[2] Brams (1987).

o no de un ser superior. Su segundo objetivo es que prefiere creer en la existencia de un ser superior. Las preferencias de la tabla son apenas una representación posible de estos objetivos. El SB prefiere que el agente elija la primera columna y dada la elección de una de las dos columnas, prefiere no revelar su existencia. El agente prefiere comprobar la existencia o no de un ser superior, resultados en la diagonal. Ahora, por fuera de la diagonal, él prefiere creer en la existencia de un ser superior que no creer.

1.2. Soluciones de un juego

Para fijar ideas, en esta sección supongamos que todos los jugadores son *racionales* en el sentido de que sus acciones son una mejor respuesta a sus conjeturas sobre las acciones de los demás. Más adelante consideraremos otras formas de racionalidad. Supongamos también que los jugadores escogen sus estrategias de forma *independiente* de los demás. Además, que todos los jugadores conocen cada uno de los elementos del juego G. Más precisamente, en el juego, la racionalidad de los jugadores y el conocimiento de los mismos es conocimiento común. A lo largo de este libro estudiaremos diferentes niveles de conocimiento y racionalidad de los jugadores. Es decir, qué tipo de racionalidad y conocimiento se supone sobre los demás y si es conocimiento común o no.

La pregunta más fundamental de la teoría de juegos es: ¿cuál es nuestra mejor predicción de la interacción de los agentes en el juego? Es decir, dadas las hipótesis mencionadas anteriormente, ¿qué estrategias consideramos razonables para cada jugador? Esto es lo que denominamos una solución de un juego. Todo concepto de solución de un juego está basado en un supuesto sobre todas las características fundamentales de un problema de decisión con múltiples agentes.

Una solución de un juego es una descripción sistemática del resultado que podríamos esperar de la interacción de los jugadores en el juego. Hay tres conceptos claves que unifican las ideas principales relacionadas con la solución de un juego. Se trata de los conceptos de dominancia, estabilidad y seguridad. El primer concepto está relacionado con la identificación de estrategias que un agente racional no jugaría. El segundo representa un concepto de equilibrio que busca identificar estrategias en las cuales no existen incentivos a desviarse, y el tercero identifica estrategias que garantizan cierta utilidad para los jugadores en el peor de los casos.

Notación 1. Sea $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$ y para cualquier jugador i sea $S_{-i} = \prod_{j \neq i}^{n} S_j$. Dada una estrategia conjunta $s = (s_1, ..., s_n) \in S$ y cualquier jugador i también denotamos la estrategia conjunta s como $s = (s_i, s_{-i})$ donde $s_i \in S_i$ es la estrategia del jugador i y s_{-i} es la estrategia conjunta de todos los jugadores con excepción del jugador i.

1.2.1. Dominancia

Existen dos ideas básicas asociadas al concepto de dominancia. La primera es la idea de estrategias dominadas y la eliminación de estrategias dominadas de forma sucesiva. La segunda es la idea de estrategias racionalizables y la eliminación de estrategias no racionalizables de forma sucesiva.

1.2.2. Eliminación de estrategias dominadas

Definición 1.6 (Dominancia)**.** Una estrategia $\widehat{s}_i \in S_i$ domina débilmente una estrategia $s_i \in S_i$, o s_i es una estrategia débilmente dominada por $\widehat{s}_i$, si para todo $s_{-i} \in S_{-i}$:

$$\pi_i(\widehat{s}_i, s_{-i}) \geq \pi_i(s_i, s_{-i})$$

con desigualdad estricta por lo menos para un s_{-i}. Cuando en la definición anterior podemos sustituir la desigualdad débil por una estricta para todo $s_{-i} \in S_{-i}$ decimos que $\widehat{s}_i \in S_i$ domina (estrictamente) la estrategia s_i, o en otras palabras, que s_i es una estrategia dominada (estrictamente) por $\widehat{s}_i$.

Nota técnica 1.7. Mientras no se diga lo contrario, el término domina o dominada se utiliza en un sentido estricto.

Ejemplo 1.8. En el siguiente juego, para el agente 1, Y domina a Z.

1\2	A	B	C
X	2,7	2,0	2,2
Y	7,0	1,1	3,2
Z	4,1	0,4	1,3

Observe que $\pi_1(Y, s_2) > \pi_1(Z, s_2)$ para cualquier $s_2 \in S_2$.Es decir:

- $\pi_1(Y, A) = 7 > \pi_1(Z, A) = 4$
- $\pi_1(Y, B) = 1 > \pi_1(Z, B) = 0$

- $\pi_1(Y, C) = 3 > \pi_1(Z, C) = 1$

Ejercicio 1.9. Demuestre que U es una estrategia dominada débilmente por V.

1\2	T	U	V
L	1,4	7,0	0,2
M	0,0	2,-6	3,5
N	5,1	1,4	4,4

Definición 1.10 (Estrategias dominantes)**.** Una estrategia $\widehat{s_i} \in S_i$ es una estrategia dominante débilmente si domina débilmente a toda estrategia. Decimos que es dominante (estrictamente) si domina (estrictamente) a toda estrategia.

Definición 1.11 (Equilibrio en estrategias dominantes)**.** Cuando cada uno de los jugadores tiene una estrategia dominante estrictamente (débilmente) $\widehat{s_i} \in S_i$, decimos que el juego tiene un equilibrio en estrategias dominantes estrictamente (débilmente). Este equilibrio es el perfil de estrategias $\widehat{s} = (\widehat{s_1}, \widehat{s_2}, ..., \widehat{s_N}) \in S$.

Ejemplo 1.12 (Dilema de los prisioneros)**.** En el dilema de los prisioneros cada uno de los agentes tiene una estrategia dominante.

1\2	A	C
A	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

Obsérvese que $\pi_i(A, s_{-i}) > \pi_i(C, s_{-i})$ para todo i y para todo $s_{-i} \in S_{-i}$.

Ejemplo 1.13 (Batalla de los sexos)**.** En la batalla de los sexos ningún jugador tiene una estrategia dominante.

M\H	B	S
B	3,2	1,1
S	0,0	2,3

Note que $\pi_1(B, B) > \pi_1(S, B)$, sin embargo $\pi_1(B, S) < \pi_1(S, S)$ por lo que ni B domina a S, ni al contrario. De igual manera, para $i = 2$ $\pi_2(B, B) > \pi_2(B, S)$ pero $\pi_2(S, B) < \pi_2(S, S)$.

Ejercicio 1.14. Demuestre que si existe un equilibrio en estrategias dominantes (estrictamente o débilmente) entonces es único.

El equilibrio en estrategias dominantes es un concepto de equilibrio muy fuerte desde el punto de vista estratégico, ya que requiere de la existencia de estrategias dominantes para cada jugador. Sin embargo, es muy débil desde el punto de vista del grado de conocimiento que se supone de los jugadores. El equilibrio en estrategias dominantes estrictamente se basa en una hipótesis de comportamiento débil: los individuos no juegan nunca una estrategia que es dominada. Luego, al existir una estrategia dominante estrictamente, esta es la única a considerar como racional (la hipótesis en el caso de estrategias dominantes débilmente es más discutible como veremos más adelante).

Estas características hacen que este concepto de solución sea muy fuerte y que no exista en muchos ejemplos. La tensión entre los diferentes conceptos de solución, las exigencias desde el punto de vista estratégico de un juego y el conocimiento que se supone de los jugadores será una constante a lo largo de este libro.

Para estudiar más a fondo la idea de condiciones mínimas que debe satisfacer un concepto de solución introduciremos el concepto de estrategias no dominadas iterativamente. El concepto de dominancia sugiere una forma de identificar un conjunto de estrategias en el cual cualquier resultado de un juego debería de estar.

Definición 1.15 (Estrategias no dominadas estrictamente de forma iterativa)**.** Sea $S_i^0 = S_i$ y definamos S_i^k, $k \geq 0$ de la siguiente forma:

$$S_i^{k+1} = \left\{ \begin{array}{c} s_i \in S_i^k : \text{No existe } \widehat{s}_i \in S_i^k \text{ tal que} \\ \pi_i(\widehat{s}_i, s_{-i}) > \pi_i(s_i, s_{-i}),\ \forall s_{-i} \in S_{-i}^k \end{array} \right\}$$

y $S_i^\infty = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_i^k$. El conjunto S_i^∞ se denomina el conjunto de estrategias no dominadas estrictamente de forma iterativa del agente i y el conjunto $S^\infty = \prod\limits_{i=1}^{N} S_i^\infty$ el conjunto de estrategias conjuntas no dominadas estrictamente de forma iterativa del juego G.

Definición 1.16 (Juegos solucionables en estrategias no dominadas iterativamente)**.** Si S^∞ consiste de un sólo elemento, decimos que el juego es solucionable en estrategias no dominadas estrictamente de forma iterativa.

Ejemplo 1.17. Consideremos el juego:

1\2	A	B	C
X	2,7	2,0	2,2
Y	7,0	1,1	3,2
Z	4,1	0,4	1,3

El proceso de eliminación arroja:

$$\begin{array}{l|l}
S_1^0 = \{X, Y, Z\} & S_2^0 = \{A, B, C\} \\
S_1^1 = \{X, Y\} & S_2^1 = \{A, B, C\} \\
S_1^2 = \{X, Y\} & S_2^2 = \{A, C\} \\
S_1^3 = \{Y\} & S_2^3 = \{A, C\} \\
S_1^4 = \{Y\} & S_2^4 = \{C\}
\end{array}$$

Recuerde que, mientras no se diga lo contrario, nos referiremos con estrategia no dominada a cualquier estrategia no dominada en un sentido estricto.

Observemos que el concepto de estrategias no dominadas iterativamente de un juego lo hemos definido únicamente como un proceso de eliminación secuencial de estrategias dominadas estrictamente. Un ejemplo que ilustra los problemas de utilizar estrategias no dominadas débilmente será discutido más adelante.

La definición de dominancia iterativa supone que en cada iteración se eliminan *todas* las estrategias dominadas estrictamente. Esto no es esencial en la definición. En efecto, se puede demostrar que el resultado final es independiente de si se eliminan algunas o todas y del orden en el que se eliminan.[3]

De forma análoga a la definición anterior, podemos definir W_i^k, W_i^∞ y W^∞ utilizando el concepto de estrategias dominadas débilmente. De la definición es implícito que en cada iteración todas las estrategías dominadas débilmente se deberían de eliminar. Ahora, a diferencia de la dominancia estricta, el concepto de supervivencia de estrategías débilmente dominadas iterativamente sí depende de si se eliminan todas las estrategias o no y del orden en el que se eliminan. Los siguientes ejemplos ponen en evidencia estas características.

Ejemplo 1.18 (Eliminación de estrategias dominadas débilmente)**.** Considere el siguiente ejemplo:

1\2	L	R
U	5,1	4,0
M	6,0	3,1
D	6,4	4,4

Observe que D domina débilmente tanto a U como a M. Si se empieza el proceso eliminando a U solamente, el resultado es diferente a si se empieza

[3]Véase Osborne and Rubinstein (1994) página 60, para una definición que sólo supone que se eliminan algunas estrategias en cada iteración.

eliminando a M solamente y es diferente a si se eliminan ambas al comienzo. Eliminando a U sobreviven $\{(D,R)\}$. Eliminando a M sobreviven $\{(D,L)\}$. Dominando débilmente a U y a M sobreviven $\{(D,L),(D,R)\}$.

Ejemplo 1.19 (Eliminación de estrategias dominadas débilmente)**.** Considere el siguiente ejemplo:

1\2	W	X	Y
A	1,2	2,3	0,3
B	2,2	2,1	3,2
C	2,1	0,0	1,0

Si aquí se eliminan tanto A como C el resultado es diferente a si se elimina solo C. Si se elimina C sobreviven $\{(B,Y)\}$. Si se elimina A y C sobreviven $\{(B,W),(B,Y)\}$.

Estas características del proceso de eliminación iterativa débil hacen más difícil de racionalizar este proceso como hipótesis de comportamiento. Sin embargo, una forma de hacerlo es la siguiente. Suponga que los jugadores suponen que sus adversarios pueden tener una mano temblorosa. Vamos a ilustrar esto a través de un ejemplo muy sencillo. Considere el siguiente juego:

1\2	A	B
A	1,2	2,3
B	2,2	2,0

La estrategia A es dominada débilmente para el jugador 1. Ahora si el jugador 1 piensa que su adversario va jugar con probabilidad positiva cada una de sus acciones (mano temblorosa) entonces en valor esperado la estrategia A es dominada estrictamente. Observemos que la hipótesis de racionalidad de no jugar estrategias dominadas débilmente es una hipótesis más fuerte que suponer que los jugadores no juegan estrategias dominadas estrictamente.

Ejercicio 1.20. Demuestre que $W^\infty \subseteq S^\infty$. Dé un ejemplo que muestre que en general la contenencia es estricta.

Ejercicio 1.21. Sea EW y ES el conjunto de equilibrios en estrategias dominantes débilmente y estríctamente respectivamente. Demuestre que:

$$ES \subseteq EW \subseteq W^\infty \subseteq S^\infty$$

El concepto de estrategias no dominadas iterativamente enmarca los requerimientos mínimos que debe tener cualquier candidato a solución de un juego. Sin embargo, no es un concepto de equilibrio estrictamente hablando, en el sentido de que no lleva en consideración una noción de estabilidad en la cual, con ese conjunto de estrategias, los jugadores no tengan incentivos unilaterales a desviarse. En cambio, se trata de un conjunto de estrategias que deberían contener a cualquier concepto de solución de un juego.

El concepto de estrategias no dominadas iterativamente es un concepto muy débil y en ocasiones no provee de ninguna información adicional sobre el resultado del juego. Por ejemplo, en la batalla de los sexos, ningún jugador tiene una estrategia dominada y, por lo tanto, S^{∞} es el mismo conjunto de estrategias del juego original.

En este orden de ideas, aunque la idea de eliminación de estrategias dominadas iterativamente es un concepto muy débil desde el punto de vista estratégico, supone algo más de conocimiento por parte de los jugadores. Este conocimiento está relacionado con qué conoce uno sobre lo que los demás hacen. Específicamente, la hipótesis de comportamiento es que ningún jugador juega una estrategia dominada y se supone una forma débil de inteligencia, la idea de que todo jugador sabe que el otro no jugará una estrategia dominada y, a su vez, cada uno de ellos sabe que el otro sabe, etc.

Las hipótesis de racionalidad y conocimiento común sobre la inteligencia de los jugadores permiten, en principio, considerar como irracionales algunas otras estrategias que no son eliminadas por el proceso de eliminación de estrategias dominadas estrictamente. Esto nos conduce al siguiente concepto; el de estrategias racionalizables.

Ejercicio 1.22 (Subasta al segundo precio con información completa)**.** Considere un juego en el que uno conjunto de jugadores (i.e., participantes de una subasta) están ofertando por un único bien que se está subastando. Cada jugador tiene una valoración privada del objeto (i.e., en este contexto esto quiere decir que la valoración que cada agente tiene del objeto no depende de la valoración que los demás tengan del objeto, es independiente) pero esta es conocimiento común de todos los jugadores (i.e., esto es lo que se conoce como información completa, concepto que estudiaremos más adelante). Los agentes deben ofertar de forma simultánea por el bien y gana el que más oferte gana pero paga la segunda oferta más alta (i.e., subasta al segundo precio). Por simplicidad supongamos que no hay empates. El pago para cada jugador es, en caso de ganar, igual a su valoración menos lo que paga. De lo contrario, es cero. Demuestre que la eliminación débil de estrategias dominadas débilmente tiene una predicción muy precisa: ganan los jugadores que tienen la valoración más alta del objeto.

1.2.3. Estrategias racionalizables

Definición 1.23 (Mejor respuesta)**.** Una estrategia $\widehat{s}_i$ es mejor respuesta para el jugador i cuando las estrategias de los demás son s_{-i} si:

$$\pi_i(\widehat{s}_i, s_{-i}) \geq \pi_i(s_i, s_{-i})$$

para todo s_i. Una estrategia s_i nunca es una mejor respuesta si no existe s_{-i} tal que s_i sea mejor respuesta cuando las estrategias de los demás son s_{-i}.

Ejemplo 1.24 (Dilema de los prisioneros)**.** En el dilema de los prisioneros la mejor respuesta para los dos jugadores es A para todo s_{-i}:

1\2	A	C
A	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

Cuando 2 juega A (i.e. $s_{-1} = A$) la mejor respuesta del jugador 1 es jugar $\widehat{s}_1 = A$ dado que $\pi_1(A, A) = -10 \geq \pi_1(C, A) = -12$. Del mismo modo, cuando $s_{-1} = C$ la mejor respuesta del jugador 1 sigue siendo $\widehat{s}_1 = A$ dado que $\pi_1(A, C) = 0 \geq \pi_1(C, C) = -1$. Dado que los pagos de este juego son simétricos, la mejor respuesta del jugador 2 será $\widehat{s}_2 = A$ tanto para $s_{-2} = A$ como para $s_{-2} = C$.

Ejercicio 1.25. Muestre que en la batalla de los sexos $\widehat{s}_1 = B$ es la mejor respuesta para $s_{-1} = B$ y que $\widehat{s}_1 = S$ es la mejor respuesta para $s_{-1} = S$. Encuentre la mejor respuesta de 2 para cada estrategia de 1.

La hipótesis de racionalidad sugiere que un jugador sólo jugará una estrategia que sea mejor respuesta a algún perfil de estrategias de los demás jugadores (esta es una hipótesis de racionalidad más fuerte que suponer que los jugadores no jugarían estrategias dominadas, véase ejercicio 1.28). Es intuitivo pensar en la misma línea que la definición de eliminación de estrategias dominadas estrictamente y extender a una definición de eliminación iterativa de estrategias que nunca son mejor respuesta.

Definición 1.26 (Estrategias racionalizables)**.** Las estrategias que sobreviven al proceso de eliminación iterativa de estrategias que nunca son mejor respuesta conforman el conjunto de estrategias racionalizables R^{∞}.

Ejemplo 1.27. Considere el siguiente juego:

1\2	A	B	C
X	2,7	2,0	2,2
Y	7,0	1,1	3,2
Z	4,1	0,4	1,3

Para el jugador 1:
Si $s_{-1} = A \to \widehat{s}_1 = Y$
Si $s_{-1} = B \to \widehat{s}_1 = X$
Si $s_{-1} = C \to \widehat{s}_1 = Y$
Como Z nunca es mejor respuesta no se considera en el análisis de 2. De la misma forma se van a descartar estrategias abajo.

-Para el jugador 2:
-Si $s_{-2} = X \to \widehat{s}_2 = A$
-Si $s_{-2} = Y \to \widehat{s}_2 = C$

-Para el jugador 1:
-Si $s_{-1} = A \to \widehat{s}_1 = Y$
-Si $s_{-1} = C \to \widehat{s}_1 = Y$

-Para el jugador 2:
-Si $s_{-2} = Y \to \widehat{s}_2 = C$

-Para el jugador 1:
-Si $s_{-1} = C \to \widehat{s}_1 = Y$

Con esto se concluye que $R^\infty = \{(Y, C)\}$

Se puede demostrar que el proceso de eliminación es independiente del orden.

Ejercicio 1.28. Demuestre que una estrategia estrictamente dominada nunca es una mejor respuesta.

Ejercicio 1.29. Demuestre o dé un contraejemplo de la afirmación $R^\infty \subseteq S^\infty$.

Paradójicamente, una estrategia dominada débilmente puede ser una mejor respuesta. Este es el caso con las estrategias que son dominadas débilmente pero no lo son estrictamente. Esta observación muestra que el concepto de eliminación iterativa de estrategias débilmente dominadas no tiene bases racionales tan sólidas como el concepto basado en eliminación estricta. Sin embargo, como veremos más adelante, este tipo de eliminación puede eventualmente eliminar equilibrios de Nash lo cuál resulta atractivo en presencia de múltiples equilibrios.

1.2.4. Equilibrio de Nash - Cournot

Definición 1.30 (Equilibrio de Nash - Cournot)**.** Una estrategia conjunta $\widehat{s} \in S$ es un equilibrio de Nash - Cournot si para todo jugador i y para toda estrategia $s_i \in S_i$:

$$\pi_i(\widehat{s}_i, \widehat{s}_{-i}) \geq \pi_i(s_i, \widehat{s}_{-i})$$

Notemos que este concepto de solución tiene como eje central una idea de estabilidad. En otras palabras, en este tipo de equilibrios se cumple que ningún agente tiene incentivos unilaterales a desviar porque cualquier otra de sus estrategias, suponiendo las de los demás fijas, le trae un pago menor o igual. De ahora en adelante nos referiremos a estos equilibrios simplemente como equilibrios de Nash.

Ejemplo 1.31 (Dilema de los prisioneros)**.** En el dilema de los prisioneros el equilibrio de Nash $\widehat{s} = \{(A, A)\}$ coincide con el equilibrio en estrategias dominantes.

1\2	A	C
A	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

Note que $\widehat{s} = \{(A, A)\}$ es un equilibrio de Nash ya que no hay incentivos unilaterales a desviar:

$$\pi_i(A, A) \geq \pi_i(C, A). \quad \forall i$$

Como se demostró antes, en este juego cada jugador tiene una única estrategia dominante $s_i = A$ por lo que el equilibrio en estrategias dominantes es el perfil de estrategias (A, A) y coincide con el equilibrio de Nash.

Ejemplo 1.32. [Batalla de los sexos]. La batalla de los sexos tiene dos equilibrios de Nash, ninguno de los cuales es un equilibrio en estrategias dominantes.

M\H	B	S
B	3,2	1,1
S	0,0	2,3

Note que $\widehat{s} = \{(B, B)\}$ es un equilibrio de Nash ya que no hay incentivos unilaterales a desviar

$$\pi_i(B,B) \geq \pi_i(S,B). \quad \forall i$$

De igual manera $\widehat{s} = \{(S,S)\}$ es un equilibrio de Nash ya que no hay incentivos unilaterales a desviar

$$\pi_i(S,S) \geq \pi_i(B,S). \quad \forall i$$

Como se demostró antes, en este juego no hay ninguna estrategia que domine a la otra, por lo que no hay un equilibrio en estrategias dominantes.

Ejercicio 1.33. Demuestre que todo equilibrio en estrategias dominantes débilmente es un equilibrio de Nash.

Ejemplo 1.34 (Tragedia de los comunes)**.** n jugadores desean compartir una banda de transmisión de información. La capacidad máxima es uno y cada agente debe escoger qué cantidad $x_i \in [0,1]$ desea transmitir. El beneficio para cada agente i es:

$$\pi_i = x_i \left(1 - \sum_j x_j\right)$$

Esto quiere decir que a cada jugador le genera utilidad la cantidad que transmite, pero también la genera utilidad que la banda no esté tan congestionada. Un equilibrio de Nash de este ejemplo es:

$$x_i = \frac{1}{n+1}$$

Para demostrar que este efectivamente es un equilibrio de Nash se calcula el beneficio de usar esta estrategia y después se prueba que no existe ninguna estrategia con un pago estrictamente mayor.

Pago de seguir la estrategia:
$\pi_i = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1-n}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$
Pago de ocupar $\varepsilon > 0$ más de banda, es decir de desviarse hacia arriba:
$\pi_i = \left(\frac{1}{n+1} + \varepsilon\right)\left(1 - \frac{n-1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \varepsilon\right) = \left(\frac{1+\varepsilon(n+1)}{n+1}\right)\left(\frac{n+1-n+1-1-\varepsilon(n+1)}{n+1}\right)$
$\pi_i = \left(\frac{1+\varepsilon(n+1)}{n+1}\right)\left(\frac{1-\varepsilon(n+1)}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} - \varepsilon^2$
Dado que el pago es menor no hay incentivos a desviarse hacia arriba. Ahora analicemos si hay incentivos a ocupar $\varepsilon > 0$ menos de banda, es decir de desviar hacia abajo:
$\pi_i = \left(\frac{1}{n+1} - \varepsilon\right)\left(1 - \frac{n-1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \varepsilon\right) = \left(\frac{1-\varepsilon(n+1)}{n+1}\right)\left(\frac{n+1-n+1-1+\varepsilon(n+1)}{n+1}\right)$

$\pi_i = \left(\frac{1-\varepsilon(n+1)}{n+1}\right)\left(\frac{1+\varepsilon(n+1)}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} - \varepsilon^2$
Tampoco hay incentivos a desviar hacia abajo, por lo que es un equilibrio de Nash.

El problema es que el valor individual y social de esta solución es muy bajo: $\frac{1}{(1+N)^2}$ y $\frac{N}{(1+N)^2} \sim \frac{1}{N}$ respectivamente.
Ahora, si maximizamos el valor social suponiendo que cada agente usa la misma proporción x de la banda entonces:

$$\sum_i x_i \left(1 - \sum_j x_j\right) = nx\,(1 - nx)$$

y obtenemos la solución socialmente eficiente $x = \frac{1}{2n}$ que implica un beneficio social igual a $\frac{1}{4}$, el cual es muy superior al beneficio social en la solución descentralizada.

El dilema de los prisioneros y la tragedia de los comunes llaman la atención sobre el costo social de la descentralización (i.e., el costo de la competencia o racionalidad individual). Esto se conoce como el precio de la anarquía (*price of anarchy*).

Ejemplo 1.35 (Paradoja de Braess)**.** Este ejemplo se le atribuye a Dietrich Braess, ingeniero civil quien llamó la atención sobre sus características paradójicas a comienzos de los años 50. Considere la Figura 1.1 en la cual se representan esquemáticamente las posibles formas de ir en carro de la ciudad A a la ciudad B utilizando las dos carreteras que se muestran en la figura.

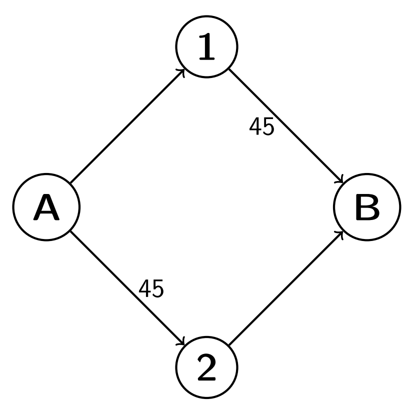


Figura 1.1: Rutas posibles para ir de la ciudad A a la B.

Debido a las características de las rutas, el tiempo que dura el trayecto de A hasta la ciudad intermedia 1 depende del tráfico, mientras que el tiempo de la ciudad intermedia 1 hasta la ciudad B es independiente del tráfico y siempre toma la misma cantidad de minutos. De forma similar, el trayecto de A a la ciudad intermedia 2 es independiente del tráfico, mientras que el de la ciudad intermedia 2 hasta la ciudad B depende del tráfico de la misma forma que de A hasta la ciudad intermedia 1. No es difícil convencerse que, dado un cierto número de carros que debe viajar desde el A hasta B, si cada uno de ellos tiene conocimiento sobre los detalles mencionados anteriormente y cada uno evalúa de forma independiente e individualista cuál carretera va utilizar, el flujo esperado es que la mitad de los carros utilizarán un trayecto y la otra mitad el otro. Concretamente supongamos que el número de carros es 4000. En el trayecto sujeto a congestión, el tiempo es igual al número de carros dividido por 100. En los trayectos que no están sujetos a congestión el tiempo es 45. En el equilibrio de Nash el tiempo de traslado es 65 minutos, 45 minutos en el trayecto no sujeto a congestión y 2000/100=20 minutos en el trayecto que sí. Ahora, supongamos que las autoridades competentes deciden construir una carretera entre las ciudades intermedias 1 y 2 con el fin de mitigar los problemas de congestión de viajar de A a B (línea punteada de la Figura 1.2).

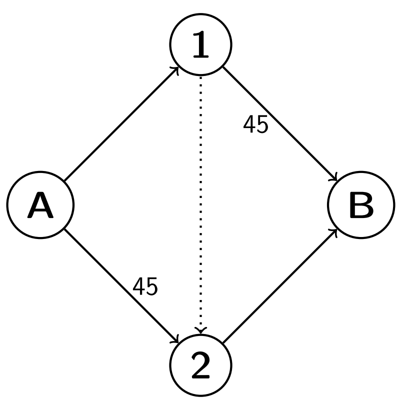


Figura 1.2: Rutas posibles para ir de la ciudad A a la B al construir una nueva carretera (línea punteada).

Más aún, supongamos que el tiempo de desplazamiento entre 1 y 2 es prácticamente cero. Ahora, la pregunta sobre el flujo vehicular esperado dado que cada individuo actúa de forma individual, conoce las características del problema mencionadas y supone que los demás actúan de la misma forma requiere un poco más de esfuerzo. Es fácil de ver que todos los carros tomaran la ruta A - 1, pues si todos hacen esto el tiempo de desplazamiento hasta 1 es 40 minutos. Estando en 1, lo óptimo es hacer 1 - 2 - B, pues el tiempo de esta última parte sería 40 minutos y la alternativa sería 45. En conclusión el nuevo equilibrio implica un tiempo de desplazamiento de 80 minutos. El resultado es sorprendente dado que el número de carros que viaja de A hacia B es exactamente el mismo, y que las mismas rutas que estaban a disposición anteriormente siguen estándolo una vez construida la variante que comunica 1 y 2. En conclusión, el comportamiento individualista en el segundo caso tiene como consecuencia un resultado ineficiente para la sociedad.

Proposición 1. Todo equilibrio de Nash sobrevive el proceso de eliminación de estrategias dominadas estrictamente.

Prueba. Sean $EN(S)$ los equilibrios de Nash del juego G cuando el espacio de estrategias es S. Es claro que $EN(S) \subseteq S^1$ (la eliminación fuerte no puede eliminar una estrategia que haga parte de un equilibrio de Nash). Ahora, obsérvese que los equilibrios de Nash cuando el espacio de estrategias es S^1 satisfacen $EN(S) \subseteq EN(S^1)$. Aplicando el mismo argumento anterior al caso en que el juego tiene como espacio de estrategias S^1 obtenemos $EN(S) \subseteq EN(S^1) \subseteq S^2$. Continuando de esta forma obtenemos $EN(S) \subseteq S^\infty$. ■

Proposición 2. Si un juego tiene un equilibrio en estrategias no dominadas iterativamente (es resoluble en estrategias no dominadas iterativamente) entonces esa estrategia conjunta es un equilibrio de Nash y además es el único equilibrio de Nash.

Prueba. Para ver esto supongamos que no es Nash. Entonces algún agente no está optimizando dadas las estrategias de los demás. Escojamos una estrategia que sí sea mejor respuesta en S_{-i}. Como esta estrategia no sobrevivió el proceso de eliminación, ya que sólo una lo hizo, entonces tuvo que ser eliminada en algún momento. Como fue eliminada, esto quiere decir que fue dominada estrictamente en algún momento en S_i^{k-1}. Ahora, $S_i^{k-1} \supseteq S^\infty$ luego en particular, existiría una estrategia que domina estrictamente a la mejor respuesta cuando los demás juegan lo que les corresponde en el equilibrio en estrategias no dominadas iterativamente, lo que es una contradicción. La unicidad se sigue de que el proceso de eliminación de estrategias dominadas no elimina ningún equilibrio de Nash. Luego, dado que el juego es resoluble (es decir, solo existe una solución para cada jugador en S^∞, y como sabemos que no se elimina equilibrios de Nash, significa que la estrategia resultante es el único equilibrio de Nash. ■

El converso no es cierto, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.36. En este ejemplo $S_i^\infty = \{A, B, C\}$, $i = 1, 2$; pero tiene un único equilibrio de Nash (A, A).

1\2	A	B	C
A	1,1	1,0	1,0
B	0,1	2,-2	-2,2
C	0,1	-2,2	2,-2

El concepto de equilibrio de Nash es más débil que el concepto de equilibrio en estrategias dominantes, un ejemplo de esto son los equilibrios en la Batalla de los sexos. En este juego, no es posible encontrar un equilibrio en estrategias dominantes. Sin embargo, se encuentran dos equilibrios de Nash como se demostró en el ejemplo 1.32.

A diferencia del proceso de dominación iterativa, el proceso de dominación débilmente iterativa sí puede eliminar equilibrios de Nash como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.37. Nash no sobrevive eliminación iterativa de estrategias dominadas débilmente.

1\2	A	B
A	1,1	0,-3
B	-3,0	0,0

Note que (A, A) Y (B, B) son equilibrios de Nash. Sin embargo, para ambos jugadores B es una estrategia dominada débilmente. Esto implica que si se realiza el proceso de eliminación iterativa de estrategias dominadas débilmente, uno de los dos equilibrios de Nash, (B, B), se va a perder. El siguiente diagrama de Venn se muestra la relación entre S^∞, W^∞ y EN para este ejemplo.

Ejemplo 1.38. Considere el siguiente juego.

1\2	A	B	C
A	1,-1	-1,1	0,-2
B	-1,1	1,-1	0,-2
C	-2,-1	1,-1	0,-1

En este caso, hay dos equilibrios de Nash $EN = \{(C, B), (C, C)\}$, ninguno de los cuales está contenido en W^∞ porque B domina débilmente a C para el

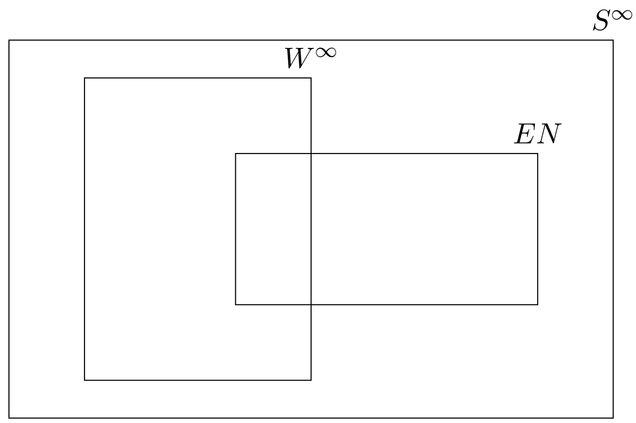


Figura 1.3: Diagrama de Venn para los conjuntos S^∞, W^∞ y EN para los casos en los que $W^\infty \cap EN \neq \varnothing$

jugardor 1. Este ejemplo muestra que existen casos en los que $W^\infty \cap EN = \varnothing$. Es decir, que el proceso de dominación iterativa de estrategias puras dominadas débilmente elimina todos los equilibrios de Nash. A continuación se tiene el diagrama de Venn de este ejemplo.

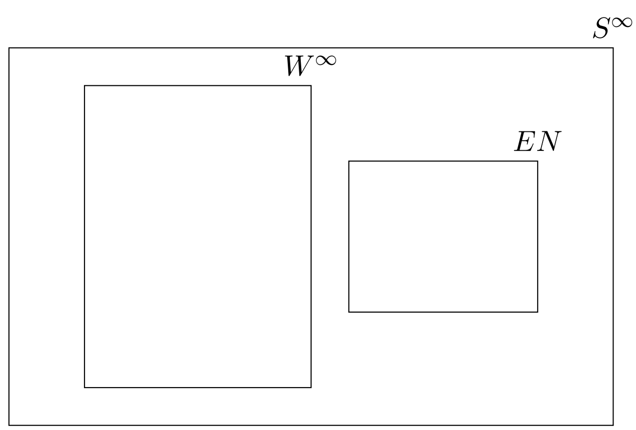


Figura 1.4: Diagrama de Venn para los conjuntos S^∞, W^∞ y EN para los casos en los que $W^\infty \cap EN = \varnothing$

No todos los juegos tienen un equilibrio de Nash en estrategias puras, como se puede observar en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.39 (Cara y Sello)**.** Considere el siguiente juego.

1\2	C	S
C	1,-1	-1,1
S	-1,1	1,-1

En este caso no existe un equilibrio de Nash - Cournot en estrategias puras. En el siguiente capítulo se introducirá la extensión mixta de un juego, que usa estretagias mixtas, para poder resolver este tipo de juegos.

El equilibrio de Nash - Cournot es un concepto más débil en términos estratégicos que el equilibrio en estrategias dominantes pero más fuerte en términos de la inteligencia que se supone tienen los jugadores. En este es necesario que los agentes tengan una expectativa correcta sobre lo que los demás van a jugar y viceversa. Más aún, es una condición natural y, por lo tanto, una condición mínima que impondremos a cualquier concepto de equilibrio.

1.2.5. Seguridad

Existen situaciones en las que jugar el equilibrio de Nash puede resultar muy riesgoso ya que se está haciendo el supuesto de que los otros jugadores van a actuar de cierta manera. Puede que el pago de que no lo hagan sea tan bajo que los jugadores privilegien el concepto de seguridad. A partir del siguiente ejemplo se va a resaltar la idea de seguridad:

Ejemplo 1.40. Considere el siguiente juego:

1\2	A	B
X	2,1	2,-20
Y	3,0	-10,1
Z	-100,2	3,3

El único equilibrio de Nash (Z, B) de este juego es un poco peligroso para el jugador 1. Observemos que si el jugador 2 comete un error y no juega Nash entonces 1 se ve muy perjudicado (pasa de ganar 3 a -100). Alternativamente, él podría jugar una estrategia que le garantizara el mejor pago posible en el peor de los casos.

Definición 1.41. Formalmente el valor maxmin o valor de seguridad de un jugador, en estrategias puras, se define como la utilidad para el jugador i cuando el jugador i resuelve:

$$\max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} \pi_i \left(s_i, s_{-i}\right)$$

Notemos que este valor supone que todos los adversarios de i actúan concertadamente para minimizar el pago de i. Las estrategias para el jugador i que resuelven el problema anterior se llaman estrategias maxmin del jugador i y el pago de ese problema se denomina valor de seguridad del juego. Intuitivamente, el valor de seguridad para un jugador es el pago más alto que el jugador puede asegurar. Si sus adversarios no se coordinan para castigarlo, podría obtener mayores pagos que el valor de seguridad.

Ejemplo 1.42. Considere el ejemplo anterior.

1\2	A	B
X	2,1	2,-20
Y	3,0	-10,1
Z	-100,2	3,3

Jugador 2:
Primero hay que encontrar $\min\limits_{s_1 \in S_1} \pi_2 (s_1, s_2)$

- si 2 juega A, 1 va a jugar Y porque $0 < 1 < 2$;
- si 2 juega B, 2 va a jugar X porque $-20 < 1 < 3$;

Ahora el jugador 2 maximiza entre sus opciones, ($\max\limits_{s_2 \in S_2} \min\limits_{s_1 \in S_1} \pi_2 (s_1, s_2)$). En este caso, la estrategia maxmin del jugador 2 va a ser A dado que $0 > -20$, y el valor maxmin para 2 va a ser 0.

En el ejercicio anterior si ambos jugadores juegan sus estrategias maxmin, se llegaría (X, A). Sin embargo, esto no puede considerarse un equilibrio dado que hay incentivos a desviar. A pesar de esto, las estrategias maxmin pueden ser útiles en un contexto con múltiple equilibrios de Nash en donde uno de ellos sea la intersección de las estrategias maxmin de los jugadores.

1.3. Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes afirmaciones determine si es falsa o verdadera y escriba una corta justificación de su respuesta.

    a) El concepto de equilibrio en estrategias dominantes estrictamente supone que los jugadores son inteligentes en el sentido de que todos saben que los demás no juegan estrategias dominadas estrictamente.

b) El conjunto que resulta de la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas (S^∞) puede ser vacío.

c) Suponer que un individuo no juega estrategias dominadas estrictamente es un hipótesis de racionalidad más fuerte que suponer que no juega estrategias dominadas débilmente.

d) El concepto de equilibrio de Nash es más exigente en términos estratégicos que el concepto de equilibrio en estrategias dominantes, pero menos exigente en términos de la inteligencia que se supone de los jugadores (i.e., conjeturas).

e) El conjunto que resulta de la eliminación iterativa de estrategias dominadas débilmente (W^∞) contiene todos los equilibrios de Nash.

f) Todo equilibrio de Nash sobrevive al proceso de eliminación iterativa de estrategias dominadas estrictamente, pero no a la eliminación iterativa de estrategias dominadas débilmente.

g) Todo equilibrio de Nash sobrevive el proceso de eliminación de estrategias dominadas débilmente, pero no la eliminación de estrategias dominadas estrictamente.

h) Todo perfil de estrategias que sobrevive al proceso de eliminación de estrategias dominadas (estríctamente) es un equilibrio de Nash.

i) El concepto de equilibrio de Nash supone que los jugadores hacen conjeturas sobre lo que los demás van a jugar pero no supone que necesariamente estas conjeturas se realizan en equilibrio.

j) La ineficiencia del equilibrio de Nash se debe en parte a que los agentes escogen sus estrategias de forma independiente.

k) El precio de la anarquía se refiere a la ineficiencia que resulta del comportamiento individualista de los individuos.

l) En un juego con varios equilibrios de Nash no puede suceder que un equilibrio sea dominado por el otro (i.e., en un equilibrio los pagos son estrictamente superiores para para cada jugador que lo que les corresponde en otro equilibrio).

m) La eliminación de estrategias dominadas estrictamente disminuye (estrictamente) el valor maxmin de un juego para por lo menos un jugador.

n) En un juego estático arbitrario, el valor maxmin para un jugador debe ser el pago en algún equilibrio de Nash.

ñ) El concepto de equilibrio de Nash implica el concepto de seguridad cuando el juego tiene equilibrios de Nash en estrategias puras.

o) Todo equilibrio de Nash es una estrategia maxmin para cada jugador.

p) En un juego en forma normal si cada jugador juega una estrategia maxmin entonces ese perfil de estrategias es un equilibrio de Nash.

2. Considere la siguiente variación de la paradoja de los sombreros. El profesor dice: "voy a esperar un minuto para que me digan de que color es el sobrero que tiene cada uno en su cabeza. Durante ese minuto pueden levantar la mano y decir rojo o blanco. Si después de un minuto no han dicho nada se entiende que cada uno de ustedes no sabe el color de sus sombrero con certeza. Una vez finalizado el juego los que tomaron una decisión ilógica serán penalizados, a los demás se les dará una bonificación. Por ejemplo, haber levantado la mano sin tener certeza, o haber dejado que pase el tiempo cuando se hubiera podido levantar la mano porque debería de saber serán penalizados."

   Ahora el profesor anuncia con un megáfono que existe por lo menos un sombrero blanco entre ellos tres y los pone a jugar con las mismas reglas del juego.

   En este caso, al finalizar el tiempo de espera, todos deberían de levantar la mano.

3. Demuestre que si el conjunto de estrategias que sobreviven la eliminación iterativa de estrategias dominadas estrictamente consiste de un solo perfil de estrategias, entonces este perfil es un equilibrio de Nash y además el equilibrio de Nash es único.

4. Demuestre que si se eliminan iterativamente las estrategias dominadas estrictamente de un juego, no se elimina ningún equilibrio de Nash.

5. Considere la siguiente definición: sea $s^* \in S$ una estrategia conjunta en el espacio de las estrategias puras. Se dice que $s^* \in \widehat{EW}$ si $\forall i$:

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}) \geq \pi_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \in \ S_i, \forall s_{-i} \in \ S_{-i}$$

   A la luz de la anterior definición ¿Son las siguientes proposiciones ciertas? Si sí, demuéstrelo formalmente. En caso contrario, dé un contraejemplo.

a) Si $s^* \in \widehat{EW}$, entonces s^* es un Equilibrio de Nash.

b) Si $\widehat{s}$ es un Equilibrio de Nash, entonces $\widehat{s} \in \widehat{EW}$.

Solución:

a) Esta afirmación es verdadera y se probará por contradicción.

Supongamos que para cierto jugador i la estrategia $s_i^* \in \widehat{EW}$ pero que $s_i^* \notin EN$. Lo primero implica que para el jugador i:

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}) \geq \pi_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \in \ S_i, \forall s_{-i} \in \ S_{-i} \tag{1.1}$$

Por otro lado, lo segundo implica que la estrategia $s_i^* \in \ S_i$ no es mejor respuesta del jugador i ante $s_{-i}^* \in \ S_{-i}$, donde $s_{-i}^* \in EN$. Es decir:

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) \ < \pi_i(\widehat{s}_i, s_{-i}^*), \text{ con } \widehat{s}_i \in \ S_i \text{ y } s_{-i}^* \in \ S_{-i} \tag{1.2}$$

Note que la ecuación (2) contradice la ecuación (1) cuando se habla en particular del jugador i, de la estrategia $\widehat{s}_i \in \ S_i$ y de la estrategia $s_{-i}^* \in \ S_{-i}$. Por tanto, se debe cumplir que si $s^* \in \widehat{EW}$, entonces s^* es un Equilibrio de Nash.

b) Esta afirmación es falsa, lo cual se muestra con un contraejemplo.

Suponga el siguiente juego en forma normal en donde solo hay dos jugadores:

1\2	C	D
A	2,3	3,1
B	2,2	3,2

Dado que para el jugador 1 se cumple que:

$$\pi_1(A, s_2) \geq \pi_1(B, s_2), \forall s_2 \in \ S_2$$

Y también se cumple que:

$$\pi_1(B, s_2) \geq \pi_1(A, s_2), \forall s_2 \in \ S_2$$

Entonces se puede afirmar que ambas estrategias de ese jugador hacen parte del conjunto $\widehat{EW}$.

Por su parte, para el jugador 2 se observa que:

$$\pi_2(s_1, C) \geq \pi_2(s_1, D), \forall s_1 \in \ S_1$$

Por tanto, se puede afirmar que para el jugador 2 la estrategia $C \in \widehat{EW}$.

En conclusión se tendría que $\widehat{EW} = [(A, C), (B, C)]$. Como (B,D) es también un equilibrio de Nash y no pertenece a $\widehat{EW}$ se prueba lo que se deseaba probar.

6. Considere el siguiente juego.

$1\backslash 2$	X_2	Y_2
X_1	2,2	0,6
Y_1	6,0	1,1

a) ¿Cuál es el equilibrio de Nash?

Suponga ahora que los jugadores se pueden comunicar y le piden a un abogado que les elabore un contrato que dice lo siguiente: si ambos lo firman, ambos prometen jugar (X_1, X_2). Si solamente uno lo firma, digamos i, entonces i promete jugar Y_i. En caso de firmar el contrato, es de obligatorio cumplimiento (e.g., no cumplirlo tiene una penalidad muy alta)

El nuevo juego es:

$1\backslash 2$	X_2	Y_2	S_2
X_1	2,2	0,6	0,6
Y_1	6,0	1,1	1,1
S_1	6,0	1,1	2,2

b) Calcular el nuevo equilibrio.

c) ¿Qué aprende usted de este ejercicio?

7. Juegos en formal normal. Considere el siguiente juego;

1\ 2	A	B	C	D
W	0,7	2,5	7,0	0,1
X	5,2	3,3	5,2	0,1
Y	7,0	2,5	0,7	0,1
Z	0,0	0,-2	0,0	10,-1

¿Cuál es su mejor predicción de la interacción de los dos jugadores en este juego?

8. Juego de la gallina, basado en Shubik (1986). Dos pilotos de avión dirigen sus aeronaves en la misma línea recta, uno en sentido sur-norte y otro en sentido norte-sur. En el momento en el que la colisión es inminente, si uno de los dos pilotos desvía el rumbo de su avión a la derecha (D) entonces este es considerado como gallina y obtiene un pago menor al del otro piloto, en el caso en que ambos se desvían, ninguno obtiene un pago y cuando ninguno se desvía (ND) la colisión genera un pago mucho menor a ambos jugadores. La matriz de pagos de esta situación es la siguiente:

1\2	ND	D
ND	-10,-10	5,-5
D	-5,5	0,0

Encuentre el equilibrio de Nash de este juego.

9. Considere el siguiente juego

1\ 2	A	B	C	D
W	3,4	5,6	2,1	4,5
X	5,5	4,3	3,4	2,8
Y	3,3	5,6	7,9	4,1
Z	3,2	5,4	6,2	8,9

a) Encuentre S^{∞}.

b) Encuentre W^{∞}.

c) Encuentre el equilibrio en estrategias dominantes.

d) Encuentre R^{∞}.

e) Encuentre el equilibrio de Nash.

10. Usando el principio del buen orden de los números naturales demuestre la proposición 1.

Solución

Suponga que tenemos una estrategia conjunta que es Nash pero no está en S^{∞}. Eso quiere decir que para algún i, la estrategia que le corresponde en Nash no está en S_i^{∞}, luego fue eliminada en alguna iteración

k. Sea k el menor k para el cual existe un i tal que la estrategia que le corresponde a i en el equilibrio de Nash es eliminada en la iteración k. Entonces esto implica que existe una estrategia en S_i^{k-1} que domina estrictamente en S_{-i}^{k-1} la estrategia de Nash que le corresponde a i. Sin embargo, todas las estrategias de los demás jugadores pertenecen a S_{-i}^{k-1} (por la definición de k, además $k \neq 0$) luego esto implicaría que la estrategia que le corresponde a i en el equilibrio de Nash no sería una mejor respuesta.

11. Juego de Blotto. Imagine que usted es un coronel del ejército, antes de iniciar un combate debe decidir dónde ubicar sus tropas (T) entre un determinado número de campos de batalla (N). Usted sabe que en un mismo campo de batalla ganara quien asigne más tropas, sin embargo, ninguna de las partes conoce a cuantas tropas se enfrentaran en cada campo. Para ganar el combate será necesario maximizar el número de campos de batalla en los cuales se venció a las tropas enemigas.

    a) Definiendo S como el conjunto de estrategias posibles. Si usted debe asignar al menos una tropa a cada campo de batalla, donde $T \geq N$ ¿cuantas estrategias ($|S|$) puede aplicar?

    b) Si $T = 5$ y $N = 3$ plantee el juego de forma normal donde los pagos sean 1 si tiene más campos ganados, 0 si empatan y -1 si tiene menos campos ganados a su oponente

    c) A partir del juego anterior determine cuales son los equilibrios de Nash del juego tanto en estrategias puras como en mixtas

    d) Asuma que $T = 6$ y $N = 3$, ahora considere una nueva regla en la que solo es posible ubicar tropas en un orden no decreciente, plantee el juego de forma normal y encuentre los equilibrios de Nash y la estrategia optima

Solución

a) El número de estrategias estará determinado por

$$|S| = \begin{cases} 1 & si\ T = N \\ \binom{T}{N} \cdot - \binom{T-1}{N} \cdot & de\ lo\ contrario \end{cases} \tag{1.3}$$

simplificando

$$|S| = \begin{cases} 1 & si\ T = N \\ \dfrac{(T-1)!}{(N-1)!(T-N)!} & de\ lo\ contrario \end{cases} \tag{1.4}$$

b)

Jugador 1 \ Jugador 2	(1,2,2)	(2,1,2)	(2,2,1)	(1,1,3)	(1,3,1)	(3,1,1)
(1,2,2)	0	0	0	0	0	1
(2,1,2)	0	0	0	0	1	0
(2,2,1)	0	0	0	1	0	0
(1,1,3)	0	0	-1	0	0	0
(1,3,1)	0	-1	0	0	0	0
(3,1,1)	-1	0	0	0	0	0

c) El juego tiene como $EN = \{[(1,2,2);(2,1,2);(2,2,1)] \times [(1,2,2);(2,1,2);(2,2,1)]\}$ en estrategias puras, y un infinito número de equilibrios en mixtas entre las estrategias mencionadas en los equilibrios en puras

d)

Jugador 1 \ Jugador 2	(2,2,2)	(1,2,3)	(1,1,4)
(2,2,2)	0	0	1
(1,2,3)	0	0	0
(1,1,4)	-1	0	0

$EN = \{[(2,2,2);(1,2,3)] \times [(2,2,2);(1,2,3)]\}$ en estrategias puras, y un infinito número de equilibrios en mixtas entre las estrategias mencionadas en los equilibrios en puras. La estrategia optima la podemos encontrar con el EW en la cual ambos jugadores jugaran (2,2,2)

12. Considere el siguiente juego

1\ 2	A	B	C
W	a,b	c,d	e,f
X	g,h	i,j	k,l
Y	m,n	o,p	q,r

De valores a cada letra de tal forma que:

a) Exista un equilibrio en estartegias dominantes.

b) $S^\infty = W^\infty$

c) EN$=W^\infty=R^\infty=S^\infty$

   d) Exista un Equilibrio de Nash que no pertenezca a W^∞

   e) R^∞ y EN en puras sean iguales y no exista un equilibrio en estrategias dominantes.

13. Precio de la Anarquía. En máximo media página explique en que consiste el precio de la anarquía y dé por lo menos un ejemplo formal (explícito de un juego con su respectiva justificación) en el que se presenta dicho fenómeno.

14. Demostrar las siguientes proposiciones:

   a) La estrategia maxmin de un jugador no es única.

   b) Una estrategia dominante (estricta o débilmente) es maxmin.

   c) La eliminación de estrategias dominates (estricta o débilmente) no cambia el valor de seguridad de un juego para ningun jugador.

Capítulo 2

Extensión mixta

2.1. Extensión mixta de un juego

Una forma de enriquecer considerablemente la teoría es generalizando el concepto de estrategia. En este capítulo se retomarán los conceptos del capítulo anterior en el contexto de estrategias mixtas. Una estrategia mixta es una distribución de probabilidad sobre el espacio de las acciones (i.e., estrategias puras). Es decir, una estrategia mixta expresa la probabilidad con la que cada agente va a jugar cada una de sus acciones.

Existen por lo menos dos formas de motivar el concepto de estrategias mixtas. A lo largo de los ejemplos que estudiaremos, una u otra forma de justificar este concepto tendrá más relevancia. Sin embargo, la utilización de estrategias mixtas no deja ser una idea controvertida y muy discutida cuando se trata de los fundamentos de la teoría de juegos. ¿Realmente es natural suponer que un agente elige una distribución de probabilidad que determina sus acciones y no una acción misma?

La primera manera de justificar el concepto de estrategias mixtas surge de naturalmente cuando es del interés de los diferentes jugadores seguir estrategias *impredecibles* para los demás jugadores y viceversa. Ahora, la mejor manera de generar estrategias impredecibles es justamente hacerlo de tal forma que para cada jugador inclusive su propia estrategia sea impredecible. Esta situación es típica de juegos en los que los jugadores tienen intereses opuestos.

La segunda forma de justificación proviene de un contexto en el que los jugadores tienen implícitamente el interés de colaborar, ya que resulta mejor desde el punto de vista individual. La imposibilidad de forzar una coordinación entre las partes hace que los agentes formen expectativas sobre lo que los demás jugadores van a escoger. Estas expectativas se pueden modelar como distribuciones de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras de cada jugador, es decir, como estrategias mixtas [1].

Una forma de entender esto es que cada jugador recibe una señal privada independiente y sus estrategias no son más que funciones de la señal en el espacio de estrategias puras (véase Mas Colell et. al. página 232). Borel [1921] fue el precursor de la idea de estrategias mixtas.

Definición 2.1 (Estrategias mixtas)**.** Para el jugador i, una estrategia mixta σ_i sobre el espacio de estrategias puras es un distribución de probabilidad sobre S_i. Denotamos esto por $\sigma_i \in \Sigma_i$ donde Σ_i es el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre S_i y $\sigma_i(s_i)$ es la probabilidad que la estrategia σ_i le asigna a la acción $s_i \in S_i$. Una estrategia mixta conjunta o perfil de estrategias es un vector $\sigma \in \Sigma = \prod_{i=1}^{N} \Sigma_i$, $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_N)$ donde $\sigma_i \in \Sigma_i$[2]. Adicionalmente, suponemos que los jugadores escogen las estrategias mixtas de forma *estadísticamente independiente.*

En ocasiones haremos explícito el conjunto de estrategias puras sobre el cual se definen las estrategias mixtas Σ_i y utilizaremos la notación, $\Sigma(S_i)$.

Definición 2.2 (Extensión mixta de un juego en forma normal)**.** Sea $G = \left(N, \{S_i\}_{i=1,\ldots,n}, \{\pi_i\}_{i=1,\ldots,n}\right)$ un juego en forma normal. La extensión mixta del juego es el juego en forma estratégica:

$$\overline{G} = (N, \{\Sigma_i\}_{i=1,\ldots,n}, \{\overline{\pi}_i\}_{i=1,\ldots,n})$$

donde el pago neto de cada jugador es una extensión del pago neto π_i definido por $\overline{\pi}_i : \Sigma \to R$ donde:

$$\overline{\pi}_i(\sigma_1, ..., \sigma_n) = \sum_{s_1 \in S_1, \ldots, s_n \in S_n} \sigma_1(s_1)...\sigma_n(s_n)\pi_i(s_1, ..., s_n)$$

Note que el pago de los jugadores es un pago esperado; su estructura está dada por la suma de los pagos de cada evento (cada estrategia conjunta pura) multiplicados por las probabilidades de ocurrencia (estrategias mixtas

[1]Véase sección 3.2.4, página 41 de [OR] para la formalización de esta intepretación

[2]De forma análoga, decimos que un vector $s \in S$, donde $s_i \in S_i$ es una estrategia conjunta o perfil de estrategias en estrategias puras.

de cada jugador). Además, dado que es una distribución de probabilidad, $\sum_{s_1 \in S_1,...,s_n \in S_n} \sigma_1(s_1)...\sigma_n(s_n) = 1$. Es importante resaltar que hemos utilizado el hecho de que los jugadores escogen las estrategias de forma independiente.

Ejemplo 2.3. Considere el juego de Piedra (R), Papel (P) o Tijera (S).

$1\backslash 2$	R	P	S
R	0,0	-1,1	1,-1
P	1,-1	0,0	-1,1
S	-1,1	1,-1	0,0

En este juego cada jugador tiene 3 estrategias puras $S_1 = S_2 = \{R, P, S\}$. Una estrategia mixta de este juego para el jugador i es de la forma $\sigma_i = (\alpha, \beta, \gamma)$ con α, β y $\gamma \in [0, 1]$ y $\alpha+\beta+\gamma = 1$. Por ejemplo, $\sigma_i = (1/2, 1/4, 1/4)$ quiere decir que el jugador i jugará con probablidad de un medio Piedra (R) y con una probablidad de un cuarto Papel (P) y Tijeras (S). Las estrategias puras son estrategias mixtas con uno de sus componentes igual a 1. Observe que $s_i = R$ es lo mismo que $\sigma_i = (1, 0, 0)$, $s_i = P$ es $\sigma_i = (0, 1, 0)$ y $s_i = S$ es $\sigma_i = (0, 0, 1)$.

Este es un juego en el que los jugadores quisieran ser tan impredecibles como puedan para que su adversario no anticipe su jugada y les gane. De hecho, se puede demostrar que $EN = \{\sigma_1^*, \sigma_2^*\}$ con $\sigma_1^* = \sigma_2^* = (1/3, 1/3, 1/3)$.

Con algunas consideraciones adicionales, las definiciones que hemos hecho en el Capítulo 1 pueden extenderse a la extensión mixta del juego. A continuación se presentan los conceptos de dominancia, estrategias racionalizables y equilibrios de Nash en su extensión mixta.

Notación 2. Por simplicidad en la notación escribiremos $\overline{\pi}_i$ simplemente como π_i.

2.1.1. Dominancia

Definición 2.4 (Dominancia de mixtas por mixtas)**.** Decimos que para el agente $i \in N$ una estrategia mixta $\sigma_i \in \Sigma_i$ es dominada (estrictamente) por una estrategia $\widehat{\sigma}_i \in \Sigma_i$ si para todo $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$:

$$\pi_i(\widehat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) > \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

Vale la pena resaltar que los pagos esperados de cualquier estrategia mixta son combinaciones convexas de los pagos de las estrategias puras involucradas, por lo que nunca van a superar el pago de la estrategia pura con el pago más alto. Esto implica que para establecer que una estrategia mixta es dominada no es necesario probar con cada $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$. Solo hace falta probarlo para las estrategias puras $s_{-i} \in S_{-i}$.

Definición 2.5 (Dominancia débil de mixtas por mixtas)**.** Decimos que para el agente $i \in N$ una estrategia mixta $\sigma_i \in \Sigma_i$ es dominada débilmente por una estrategia $\widehat{\sigma}_i \in \Sigma_i$ si para todo $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$:

$$\pi_i(\widehat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) \geq \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

Con desigualdad estricta en almenos un $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$.

Esta definición es más débil que la definición que dimos en el caso de estrategias puras. Es decir, si una estrategia es dominada débilmente por una estrategia pura, entonces es dominada débilmente por una estrategia mixta. El converso claramente no es cierto como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6. Considere el siguiente juego en forma estratégica (los pagos del jugador 2 son irrelevantes para el ejemplo).

1\2	A	B
X	1,*	1,*
Y	3,*	0,*
Z	0,*	3,*

En este juego, ninguna estrategia del jugador 1 es dominada en estrategias puras. Sin embargo, la estrategia $s_1 = X$ es dominada por la estrategia mixta $\sigma_1 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Obsérvese que:
$\pi_1(\sigma_1, A) = 0 * 1 + \frac{1}{2} * 3 + \frac{1}{2} * 0 = \frac{3}{2} > \pi_1(X, A) = 1$
$\pi_1(\sigma_1, B) = 0 * 1 + \frac{1}{2} * 0 + \frac{1}{2} * 3 = \frac{3}{2} > \pi_1(X, B) = 1$
Recuerde que, el pago para el jugador 1 de cualquier estrategia mixta que 2 pueda jugar es una combinación convexa, de los pagos que obtiene 1 en las puras. Por esta razón, solo hace falta probar que para las puras se cumple la definición de dominación.

Ejemplo 2.7. Para el siguiente juego se van a encontrar todas las estretegias mixtas que dominan a C.

1\2	A	B	C
X	1,0	1,4	3,1
Y	5,7	0,2	5,5
Z	0,4	3,0	0,1

En este juego, ninguna estrategia del jugador 2 es dominada en puras. Para hacer el análisis en mixtas es bueno buscar una estrategia candidata a ser dominada para saber a cuál componente de la estrategia mixta darle una probabilidad de cero. Note que ninguna combinación convexa de los pagos de B y C va a poder superar el pago de A cuando 1 juega Y o Z, entonces A se descarta como candidata a ser dominada. De igual manera, cuando 1 juega X, el pago de B no puede ser superado por una combinación convexa de A y C.

Por este motivo se va a plantear una estrategia mixta para dominar a C. Para que esto ocurra es necesario que exista un $\sigma_2 = (\alpha, 1-\alpha, 0)$ tal que $\pi_2(X, \sigma_2) > \pi_2(X, C)$, $\pi_2(Y, \sigma_2) > \pi_2(Y, C)$ y $\pi_2(Z, \sigma_2) > \pi_2(Z, C)$. Entonces se tienen que cumplir las siguientes condiciones:

$$\pi_2(X, \sigma_2) = \alpha * 0 + (1-\alpha) * 4 > \pi_2(X, C) = 1 \tag{2.1}$$

$$\pi_2(Y, \sigma_2 = \alpha * 7 + (1-\alpha) * 2 > \pi_2(Y, C) = 5 \tag{2.2}$$

$$\pi_2(Z, \sigma_2) = \alpha * 4 + (1-\alpha) * 0 > \pi_2(Z, C) = 1 \tag{2.3}$$

De la primera condición se obtiene que $\alpha < \frac{3}{4}$, de la segunda $\alpha > \frac{3}{5}$ y de la tercera $\alpha > \frac{1}{4}$. Entonces, toda estrategia mixta de la forma $\sigma_2 = (\alpha, 1-\alpha, 0)$ con $\alpha \in (\frac{3}{5}, \frac{3}{4})$ domina a C.

Ejercicio 2.8. Muestre que para el siguiente juego no es posible dominar estrictamente ninguna estrategia del jugador 1 ni en puras ni en mixtas. Sin embargo, es posible encontrar una estrategia mixta que domine débilmente a L.

1\2	U	V	W
L	0,0	3,1	1,1
M	5,1	2,2	2,0
N	1,4	4,2	0,1

Ejercicio 2.9. Demuestre que la siguiente definición es equivalente a la definición dada anteriormente de dominancia estricta de una estrategia mixta por una estrategia mixta. Para el agente $i \in N$ una estrategia $\sigma_i \in \Sigma_i$ es dominada (estrictamente) por una estrategia $\widehat{\sigma}_i \in \Sigma_i$ si para todo $s_{-i} \in S_{-i}$:

$$\pi_i(\widehat{\sigma}_i, s_{-i}) > \pi_i(\sigma_i, s_{-i})$$

Esta equivalencia depende de la forma explícita como se ha definido la extensión mixta del juego.

Implícitamente en la definición de dominación suponemos que las estrategias mixtas de los demás jugadores se escogen de forma independiente. [3] Utilizando esta nueva definición de dominancia es natural definir un nuevo concepto de eliminación iterativa de estrategias mixtas dominadas (estrictamente o débilmente) por estrategias mixtas. Denotamos este conjunto Σ^∞.

Ejemplo 2.10. Vamos a encontrar Σ^∞ en el siguiente juego

1\2	X	Y	Z
A	1,7	2,2	0,3
B	0,0	4,4	1,0
C	3,1	2,0	0,2

$$\Sigma_1^0 = \{A, B, C\} \mid \Sigma_2^0 = \{X, Y, Z\}$$

Para el jugador 1, A es dominada por una mixta $\sigma_1 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\Sigma_1^1 = \{B, C\} \mid \Sigma_2^1 = \{X, Y, Z\}$$

Para el jugador 2, dado que A es dominada, se puede dominar a X con una mixta $\sigma_2 = (0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

$$\Sigma_1^2 = \{B, C\} \mid \Sigma_2^2 = \{Y, Z\}$$

Ahora en la tabla restante solo hay que hacer dominación estricta.

$$\begin{array}{l|l} \Sigma_1^3 = \{B\} & \Sigma_2^3 = \{Y, Z\} \\ \Sigma_1^4 = \{B\} & \Sigma_2^4 = \{Y\} \end{array}$$

De esta manera es posible concluir que $\Sigma^\infty = \{(B, Y)\} = \{((0, 1, 0), (0, 1, 0))\}$.

Ejercicio 2.11. Encuentre Σ^∞ para el siguiente juego:

1\2	X	Y	Z
A	-2,4	3,1	30,0
B	0,0	9,1	2,4
C	1,1	1,0	1,5

[3] Para un caso más general véase Osborne y Rubinstein página 54

2.1.2. Estrategias racionalizables

En la sección anterior de estrategias mixtas llamamos la atención sobre la posibilidad de extender el concepto de estrategias no dominadas de forma iterativa (S^∞) al concepto de estrategias mixtas no dominadas de forma iterativa (Σ^∞). Vamos a explorar un poco más esta extensión usando el concepto de estrategias racionalizables.

En el capítulo anterior se definieron a las estrategias racionalizables como aquellas que sobreviven al proceso de eliminación sucesivo de estrategias que nunca son mejor respuesta. La extensón a mixtas es natural. A continuación se define formalmente el conjunto de estrategias racionalizables en mixtas.

Definición 2.12 (Estrategias racionalizables)**.** Sea G un juego en forma normal. Para cada jugador $i \in N$ definamos la siguiente sucesión de estrategias mixtas $(R_i^q)_{i\in\mathbb{N}}$.

1. Sea $R_i^0 = \Sigma_i$.
2. $R_i^{q+1} = \{\sigma_i \in R_i^q : \exists\sigma_{-i} \in R_{-i}^q$ tal que $\forall\widetilde{\sigma}_i \in R_i^q, \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq \pi_i(\widetilde{\sigma}_i, \sigma_{-i})\}$.

   Es decir, R_i^{q+1} son las estrategias de R_i^q que son mejor respuesta a alguna estrategia $\sigma_{-i} \in R_{-i}^q$ que el agente i crea que los demás jugadores puedan eventualmente utilizar.

$R_i = \bigcap\limits_{q=1}^{\infty} R_i^q$ se llama el conjunto de estrategias racionalizables del jugador i. Una estrategia conjunta σ se llama racionalizable si la estrategia que le corresponde a cada jugador es racionalizable: $\sigma \in R = \prod\limits_{i=1}^{n} R_i$

Teorema 2.13 (Bernheim, 1984 y Pearce, 1984)**.** El conjunto de estrategias conjuntas racionalizables es no vacio. Más aún, para cada jugador, el proceso de eliminación de estrategias no racionalizables termina en un número finito de iteraciones.

La idea básica detrás del concepto de estrategias racionalizables es que los jugadores no juegan estrategias que no son racionales. Además cada uno sabe que los demás son racionales y cada uno sabe que los demás saben que son racionales, etc. Esto quiere decir que, al igual que en el concepto de equilibrio de Nash - Cournot, solamente se juegan estrategias que son mejores respuestas. Sin embargo, a diferencia del equilibrio de Nash - Cournot, no se supone que las expectativas que los agentes tienen sobre las estrategias de los demás se realizan. Es decir, intuitivamente el concepto de estrategias racionalizables supone una forma más débil de conocimiento que el concepto de equilibrio de Nash.

Definición 2.14 (Niveles de conocimiento)**.** Supongamos que cada jugador es racional en el sentido de que no juega estrategias que no son mejores respuestas a alguna estrategia de los demás. Decimos que el conocimiento de un jugador es de grado 1 si este sabe que los demás jugadores son racionales. Es de grado 2 si él sabe que los demás saben que los demás jugadores son racionales (i.e., si él sabe que los demás tienen conocimiento de grado 1), etc.

En la definición de estrategias racionalizables, q denota, intuitivamente, el grado de conocimiento que se asume de cada jugador en la definición de cada conjunto de estrategias mixtas R_i^q. También está implícito en la definición de estrategia racionalizable el hecho de que los agentes escogen sus estrategias de forma independiente y esto restringe las expectativas que los agentes se forman de las estrategias de los demás.

No es difícil convencerse que cualquier estrategia que forma parte de un equilibrio de Nash - Cournot es racionalizable. Luego, ser racionalizable es más débil que ser un equilibrio de Nash - Cournot. Por ejemplo, en la Batalla de los Sexos, el conjunto de estrategias racionalizables es la totalidad del conjunto de estrategias, luego el concepto de estrategia racionalizable es estrictamente más débil que el de Nash - Cournot. Este caso pone en evidencia que el concepto de estrategia racionalizable puede ser un concepto muy débil y con poco poder predictivo en muchos casos.

El concepto de estrategias mixtas que sobreviven el proceso de eliminación débil es un concepto aún más débil que el de estrategias racionalizables. En efecto, si una estrategia mixta es dominada, ciertamente no puede ser la respuesta óptima a ninguna estrategia conjunta que los demás jugadadores jueguen. Se sigue que el conjunto de estrategias mixtas no dominadas sucesivamente contiene al conjunto de estrategias racionalizables. En el caso de juegos bilaterales, estos dos conjuntos coinciden (Perace, 1984) pero, en general, la contenencia es estricta. Si permitiéramos que los agentes se formaran expectativas correlacionadas sobre las estrategias de los demás, ambos conceptos coincidirían (esto explica por qué en juegos bilaterales no es necesario hacer esta extensión). La siguiente figura muestra la relación entre estos conceptos.

Ejercicio 2.15. Demuestre que el conjunto de estrategias mixtas no dominadas iterativamente contiene al conjunto de estrategias racionalizables.

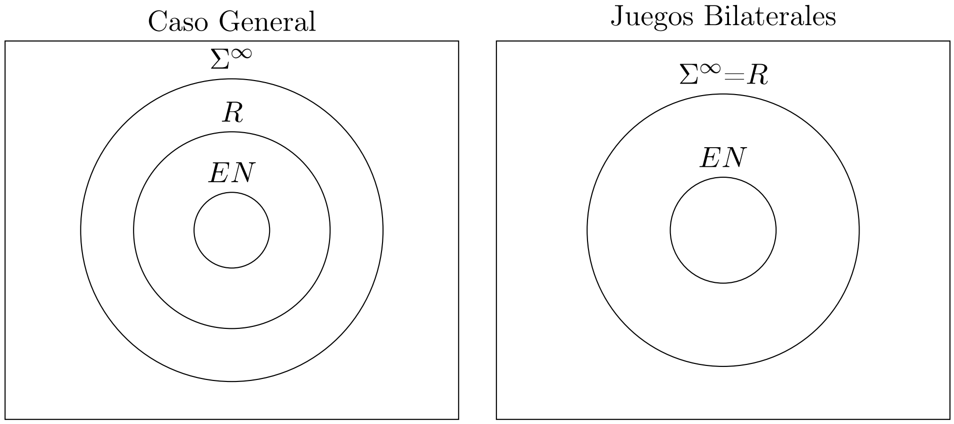


Figura 2.1: Diagramas de Venn de Σ^∞, R y EN para juegos bilaterales y en general.

Parece intutivo que una estrategia racionalizable le asigne probabilidad positiva solo a aquellas estrategias que se juegan con probabilidad positiva en algún equilibrio de Nash. Sin embargo esto no es cierto como lo demuestra un ejemplo de Bernheim (véase Vega - Redondo, tabla 2.10). Por lo tanto, el concepto de estrategia racionalizable, así como el concepto de estrategias no dominadas iterativamente, no es propiamente un concepto de equilibrio en el sentido de que no existan incentivos a desviaciones unilaterales.

2.1.3. Equilibrio de Nash - Cournot

Definición 2.16 (Equilibrio de Nash - Cournot)**.** Una estrategia mixta conjunta $\widehat{\sigma} \in \Sigma$ es un equilibrio de Nash - Cournot si para todo jugador i y para toda estrategia $\sigma_i \in \Sigma_i$:

$$\overline{\pi}_i(\widehat{\sigma}_i, \widehat{\sigma}_{-i}) \geq \overline{\pi}_i(\sigma_i, \widehat{\sigma}_{-i})$$

Proposición 3. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\widehat{\sigma}$ es un equilibrio de Nash.

2. Para todo i, $\overline{\pi}_i(\widehat{\sigma}_i, \widehat{\sigma}_{-i}) \geq \overline{\pi}_i(s_i, \widehat{\sigma}_{-i})$ para todo s_i.

3. Para todo jugador, $\overline{\pi}_i(\widehat{\sigma}_i, \widehat{\sigma}_{-i}) = \overline{\pi}_i(s_i, \widehat{\sigma}_{-i})$ para todo s_i en el soporte de $\widehat{\sigma}_i$ y $\overline{\pi}_i(\widehat{\sigma}_i, \widehat{\sigma}_{-i}) \geq \overline{\pi}_i(s_i, \widehat{\sigma}_{-i})$ para todo s_i por fuera del soporte de

$\widehat{\sigma}_i$.[4]

Nota técnica 2.17. Esta proposición es útil para calcular equilibrios de Nash en estrategias mixtas. En particular el numeral tres afirma que en un equilibrio de Nash en estrategias mixtas todas las estrategias puras con probabilidad positiva arrojan la misma utilidad que la utilidad en equilibrio.

Ejemplo 2.18 (Cara y sello)**.** Como habíamos visto en el capitulo anterior, en el ejemplo de cara y sello no existe un equilibrio de Nash - Cournot en estrategias puras. Sin embargo, la estrategia mixta $\sigma_i = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ para cada jugador es un equilibrio Nash - Cournot en estrategias mixtas.

1\2	C	S
C	1,-1	-1,1
S	-1,1	1,-1

Para ver esto, considere la forma de actuar de cada jugador cuando él supone cierto conportamiento sobre los demás. El jugador 1 cree que el jugador 2 va jugar $\sigma_2 = (\beta, 1-\beta)$. Este vector indica que el jugador uno cree que dos va a jugar C con probabilidad β, y cree que va a jugar sello con probabilidad $1-\beta$.

Ahora se obtiene el pago esperado de jugar para cada una de sus estrategias puras cuando el otro jugador juega una mixta. Recuerde que, cómo se mencionó antes, el pago de jugar un equilibrio de Nash es igual al pago de jugar cualquier estrategia en el soporte de $\hat{\sigma_i}$. Esto implica que los pagos esperados de las estrategias puras van a ser menores o iguales al pago de la mixta que es equilibrio de Nash.

$$\pi_1(C, \sigma_2) = \beta * 1 + (1-\beta) * (-1) = 2\beta - 1 \tag{2.4}$$
$$\pi_1(S, \sigma_2) = \beta * (-1) + (1-\beta) * 1 = -2\beta + 1 \tag{2.5}$$

Ahora se comparan los pagos para saber cuál va a ser la mejor respuesta del jugador 1 para cualquier estrategia del jugador 2.

El jugardor 1 va a jugar cara si y solo si: $2\beta - 1 \geq -2\beta + 1 \rightarrow \beta \geq \frac{1}{2}$

De esto es posible establecer que la mejor respuesta del jugador 1 es:

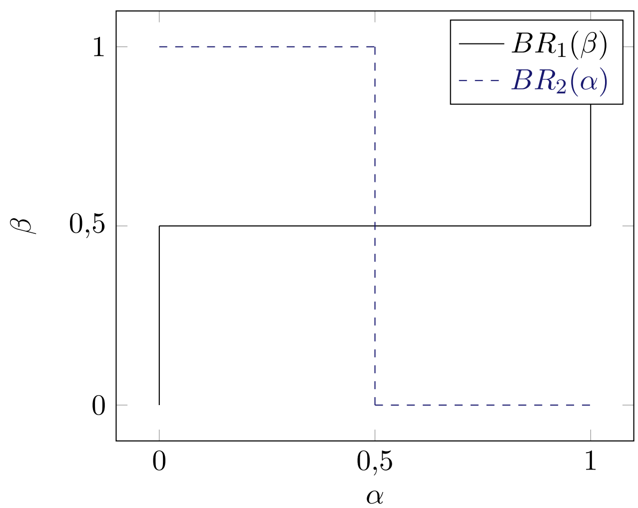
$$BR_1(\beta) = \begin{cases} \text{C} & \text{si } \beta > \frac{1}{2} \\ \text{C o S} & \text{si } \beta = \frac{1}{2} \\ \text{S} & \text{si } \beta < \frac{1}{2} \end{cases}$$

[4]Una estrategia pura está en el soporte de una estrategia mixta si tiene probabilidad positiva.

Haciendo el mismo procedimiento para el jugador 2 sobre la conjetura $\sigma_1 = (\alpha, 1-\alpha)$, se obtiene la mejor respuesta del jugador 2.

$$BR_2(\alpha) = \begin{cases} \text{C} & \text{si } \alpha < \frac{1}{2} \\ \text{C o S} & \text{si } \alpha = \frac{1}{2} \\ \text{S} & \text{si } \alpha > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Finalmente, para encontrar el equilibrio de Nash solo hay que encontrar los puntos en los que se intersectan las dos mejores respuestas. Para esto usaremos el siguiente gráfico:



En los ejes se encuentra la probabilidad de que cada jugador juegue Cara. Note que lo máximo que esta probabilidad puede ser es 1. La mejor respuesta del jugador 1 es la linea continua; el jugador 1 va a jugar sello siempre que β sea menor a 0.5, es decir α va a ser igual a cero; cuando β es 0.5 cualquier α es mejor respuesta y cuando β es mayor a 0.5, α debe ser igual a 1 (i.e. uno va a jugar cara). Para el otro jugador el análisis es el mismo para poder graficar. El punto en el que se encuentran las dos curvas es el equilibrio de Nash de este juego $EN = \{\sigma_1^*, \sigma_2^*\} = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$.

Ejercicio 2.19 (Encuentro en NY)**.** Considere el siguiente juego:

1\2	E	G
E	100,100	0,0
G	0,0	1000,1000

Muestre que este juego tiene dos equilibrio de Nash en estrategias puras y un equilibrio de Nash simétrico en estrategias mixtas $(10/11, 1/11)$. Muestre también que este equilibrio satisface las condiciones del numeral tres de la proposición anterior.

Ejemplo 2.20 (Entrada de una firma)**.** Considere el siguiente juego:

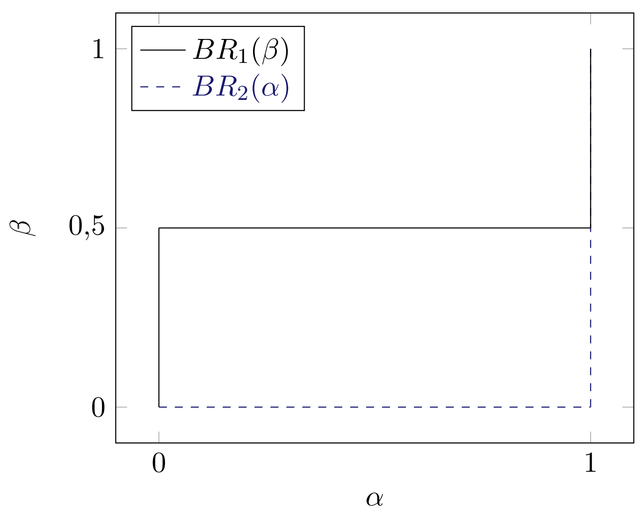
1\2	F	C
N	0,2	0,2
E	-1,-1	1,1

Este juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras (E, C) y (N, F). Haciendo el proceso del ejemplo anterior se llega a que:

$$BR_1(\beta) = \begin{cases} \text{N} & \text{si } \beta > \frac{1}{2} \\ \text{N o S} & \text{si } \beta = \frac{1}{2} \\ \text{S} & \text{si } \beta < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$BR_2(\alpha) = \begin{cases} \text{C} & \text{si } \alpha < 1 \\ \text{C o F} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Lo que gráficamente se ve de la siguiente forma:



Como se ve en el gráfico, se encuentra un continuo de equilibrios en estrategias mixtas y el equilibrio $(E, C) = ((0, 1), (0, 1))$. Todas las estrategias mixtas de la forma $\sigma = ((1,0), (\beta, 1-\beta))$, con $\beta \geq \frac{1}{2}$ son equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Note que en esta forma de escribirlo se está incluyendo el equilibrio en puras (N, F).

Ahora, considere esta interpretación del juego. El jugador 2 es una firma incumbente y monopolista en un mercado y el jugador 1 es una firma que está considerando entrar a competir a este mercado. Las estrategias F y C las interpretamos como planear pelear o conciliar. Obsérvese que el equilibrio (N, F) puede interpretarse como sustentado por la amenaza de que la firma incumbente peleará (estrategia F) en caso de que la firma 1 decida entrar. Esta amenaza es, sin embargo, poco creíble pues, dado que la firma 1 decide entrar, ciertamente no es la mejor estrategia para la firma 2 pelear. Este ejemplo sirve como motivación para el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos que estudiaremos más adelante.

Ejercicio 2.21 (Batallla de los sexos)**.** Pruebe que en este juego hay, además de los equilibrios en estretegias puras, un equilibrio en estrategias mixtas: $\sigma = \left(\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\right)$

Ejercicio 2.22 (Equilibrios simétricos)**.** Un juego de dos jugadores $G = (\{1,2\}, (S_1, S_2), (\pi_1, \pi_2))$ es un juego simétrico si $S_1 = S_2$ y si $\pi_1(s_1, s_2) \geq \pi_2(s_1, s_2)$ entonces $\pi_2(s_2, s_1) \geq \pi_1(s_2, s_1)$. Demuestre que existe un equilibrio de Nash de la forma (s, s). Este se conoce como un equilibrio simétrico. Este resultado se debe a Nash.

Ejercicio 2.23. Dilema de los viajeros. Sean $S_1 = S_2 = \{2, 3, ..., 99, 100\}$. Si $s_1 < s_2, \pi_1(s_1, s_2) = s_1 + 2, \pi_2(s_1, s_2) = s_1 - 2$. Si $s_1 > s_2, \pi_1(s_1, s_2) = s_2 - 2, \pi_2(s_1, s_2) = s_2 + 2$. Mostrar que el único equilibrio de Nash es $(2, 2)$

Ejercicio 2.24. . Basado en *Seven Puzzles You Think You Must Not Have Heard Correctly with solutions* (Winkler). Los nombres de 100 prisioneros se encuentran en 100 cajas de madera, uno en cada una. Las cajas se encuentran una al lado de la otra en un cuarto. Uno a uno los prisioneros entran en el cuarto y pueden abrir máximo 50 cajas para verificar qué nombres se encuentran en las cajas. Una vez salen del cuarto no se les permite ninguna comunicación con los demás prisioneros y deben dejar el cuarto como lo encontraron. Sin embargo, ellos sí pueden definir con anterioridad una estrategia para abrir las cajas. Si los 100 prisioneros no logran encontrar cada uno de ellos sus nombres, son asesinados. Encuentre una estrategia para ellos que les garantice salvarse con probabilidad superior a 30 %.

Ejemplo 2.25 (¿Cómo patear un penal?)**.** El domingo 9 de julio de 2006, se enfrentaban en la final del mundial de Alemania las selecciones de Francia e Italia. Corría el minuto 7 del encuentro cuando el delantero de Francia Florent Malouda caía en el área luego de un choque con el defensa italiano Marco Materazzi. Ante esta situación, el árbitro del encuentro señalo penal. El capitán de Francia Zinedine Zidane toma la responsabilidad de cobrar el tiro. Frente a él se encuentra el guardameta Gianluigi Buffon. El diez de Francia tiene la oportunidad de poner por delante a su equipo y quizás llevarse consigo su segundo mundial en su ultimo partido como jugador profesional de futbol. La gran pregunta es ¿hacia dónde debería patear el penal? ¿Qué estrategia le garantiza el mejor resultado posible?

Esta situación ejemplifica una situación típica de juegos estratégicos de suma cero. Hay dos jugadores. El primero de estos es el encargado de cobrar el penal, el cual tiene como estrategias patear a la derecha (R), al centro (C) o a la izquierda (L). El otro jugador de este juego es el arquero, quien tiene como posibles acciones lanzarse a la derecha (R), a la izquierda (L) o permanecer en el centro (C). Para simplificar el problema asuma que, si el balón es enviado en la dirección en la que el guardameta se encuentra, será tapado y el jugador dos ganará, en cualquier otro caso el jugador 1 será el ganador. En la siguiente tabla se resumen los pagos con la perspectiva del jugador que patea

Jugador 1 \ Jugador 2	L	C	R
L	0	1	1
C	1	0	1
R	1	1	0

Es fácil verificar que el único equilibrio de Nash (o Maxmin dado que es suma cero) es jugar $\frac{1}{3}$ para cada opción. En la práctica, los arqueros reconocen que aunque estén ubicados en la misma dirección en la que se patea el balón no tienen 100 % de probabilidad de tapar el tiro. De igual forma, los cobradores saben que, aunque lancen en una dirección diferente a la posición en la que estará el arquero, esto no garantiza que marquen el gol. Por esto, los pagos para cada jugador se definen por las probabilidades de marcar ($\pi_{i,j}$) o de tapar ($1 - \pi_{i,j}$), donde $i = \{L, C, R\}$ representa la elección del cobrador y $j = \{L, C, R\}$ representa la decisión del arquero.

Los resultados de la evidencia empírica muestran que cuando se reduce el juego a un escenario 2×2 ($\{L, R\} \times \{L, R\}$) los jugadores profesionales actúan jugando una estrategia mixta de acuerdo a la probabilidad de acierto observada. Otro resultado muestra cómo las decisiones tanto de cobradores como arqueros son serialmente independientes; es decir, las acciones tomadas anteriormente no influyen en la probabilidad de escoger la siguiente acción (Palacios-Huerta, 2003). En la siguiente tabla se presenta la probabilidad de anotar observada

Jugador 1 \ Jugador 2	L	R
L	$\pi_{L,L} = 58{,}3\,\%$	$\pi_{L,R} = 94{,}97\,\%$
R	$\pi_{R,L} = 92{,}91\,\%$	$\pi_{R,R} = 69{,}92\,\%$

Fuente: Palacios-Huerta (2003)

Palacios-Huerta (2003) encuentra que el equilibrio óptimo para los anteriores datos son $P(i = L) = 0{,}3854$ y $P(j = L) = 0{,}4199$, mientras que lo observado en los datos es $P(i = L) = 0{,}3998$ y $P(j = L) = 0{,}4231$, lo que no presenta diferencias significativas entre lo que predice la teoría y lo que se observa en la realidad. Cuando se amplía el análisis al escenario 3×3 el resultado no es tan claro. La evidencia empírica ha mostrado que los arqueros son proclives a un tipo particular de desviación al agente racional nombrado como "sesgo de acción" (Bar-Eli et al., 2007). Este sesgo nos muestra que cuando un arquero decide su estrategia, puede sentir menor culpabilidad de fallar si actúa como se espera (saltar ya sea a la derecha o a la izquierda) generando en la practica una probabilidad observada de mantenerse en el centro menor a lo que sería óptimo para ellos.

Con los ejemplos anteriores podemos observar el uso práctico de la teoría económica para la predicción de comportamientos estratégicos en juegos no cooperativos como el de cobrar un penal, información que quizás hubiera dado mas probabilidades a Gianluigi Buffon de mantenerse en el centro del arco, dirección en la que Zinedine Zidane hizo su lanzamiento para convertir el gol con el que Francia comenzaría ganando la final del mundial, que irónicamente perdería frente a Italia en la serie de penales.

Ejercicio 2.26. Calcular la estrategia óptima para las siguientes probabilidades de anotación (Fuente: Bar-Eli et al. (2007))

Jugador 1 \ Jugador 2	L	C	R
L	71,1 %	100 %	96,4 %
C	82,3 %	50 %	94,1 %
R	94,2 %	100 %	55,2 %

Teorema 2.27 (Nash 1950)**.** Todo juego finito (i.e., el número de jugadores y conjunto de estrategias de cada jugador es finito) tiene un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

2.2. Equilibrio de Nash - Cournot: Extensiones*

Esta sección es un poco más avanzada y no es necesaria para la comprensión del resto del libro. Para su comprensión se requiere conocer algunos conceptos básicos de análisis: conjuntos compactos, cuasiconcavidad, el teorema de punto fijo de Kakutani, Brouwer y algunos otros.

El teorema de Nash - Cournot se puede demostrar fácilmente utilizando un poco de análisis: Defina la correspondencia de mejor respuesta $B_i : \Sigma_{-i} \to \Sigma_i$ como:

$$B(\sigma_{-i}) = argmax_{\sigma \in \Sigma_i}(\pi_i(\sigma, \sigma_{-i}))$$

y sea $B : \Sigma \to \Sigma$ definida como $B = \prod B_i$. Por el teorema del punto fijo de Kakutani, B tiene un punto fijo σ^* (es decir, $\sigma^* \in \Sigma$ tal que $\sigma^* \in B(\sigma^*)$. Por definición este es un equilibrio de Nash.

Es elemental extender el anterior teorema al siguiente caso. Suponga que los espacios de estrategias son conjuntos no vacíos, compactos, convexos, las funciones de utilidad de cada agente son continuas y cuasicóncavas como función de su propia estrategia. Entonces existe un equilibrio de Nash. La prueba es idéntica a la anterior.

Ejercicio 2.28. Muestre, a través de ejemplos, que ninguna de las hipótesis de este teorema puede ser eliminada.

Nota técnica 2.29. El concepto de equilibrio Nash se remonta a Cournot [1838]. La formalización y primera demostración se debe a Nash [1950] en la que utiliza el teorema del punto fijo de Kakutani. En Nash [1951] se muestra como sustituir el teorema de Kakutani por el de Brower.

Ejercicio 2.30. Suponga que las funciones de utilidad son estrictamente cuasicóncavas en la propia estrategia. Aplique el teorema de Brower para obtener una demostración muy sencilla de la existencia de un equilibrio de Nash.

Teorema 2.31 (Glicksberg 1952)**.** Dado un juego G en forma estratégica donde el espacio de estrategias de cada jugador es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$ y las funciones de utilidad son continuas, se tiene que G tiene un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.[5]

[5]Este teorema requiere introducir el concepto de estrategia mixta sobre un espacio de estrategias continuo y además extender el juego y definir una noción de continuidad en el espacio de estrategias mixtas.

La extensión es importante pues introduce juegos en los que el espacio de acciones es un continuo. Sin embargo, la hipótesis de continuidad es fuerte. Por ejemplo, no se cumple en el modelo de competencia oligopolística de Bertrand.

Teorema 2.32 (Debreu 1952, Fan 1952 y Glicksberg 1952)**.** Bajo las condiciones del teorema anterior, si el espacio de estrategias es convexo y las funciones de utilidad son cuasicóncavas en la estrategia de cada jugador entonces el juego tiene un equilibrio Nash en estrategias puras.

Nota técnica 2.33. La demostración de este teorema es una aplicación inmediata del teorema de punto fijo de Kakutani (véase la proposición 20.3 de [OR]). El teorema de Nash es un corolario inmediato: un equilibrio de estrategias mixtas es un equilibrio en estrategias puras de la extensión mixta del juego. Es fácil ver que la extensión mixta satisface todas las propiedades del teorema anterior.

Ejemplo 2.34 (No existencia del equilibrio de Nash)**.** Supongamos que dos jugadores pueden venderle un producto a tres posibles compradores. Los compradores A y C tienen acceso a sólo un vendedor. B tiene acceso a los dos vendedores. Los tres compradores tienen una restricción presupuestal de una unidad. Los vendedores escogen el precio de venta de su producto pero no pueden discriminar entre los compradores. Ellos escogen de forma simultánea un precio $p_i \in [0, 1]$. Supongamos que en caso de que los precios sean idénticos el comprador B compra del vendedor 1.

Este juego no tiene un equilibrio, aun en estrategias mixtas. Suponga que existe un equilibrio en estrategias puras tal que $p_1 > \frac{1}{2}$. El jugador 2 va escoger un precio ligeramente inferior $p_1 > p_2 > \frac{1}{2}$. En este caso el jugador 1 va querer disminuir su precio y así sucesivamente. Luego no existe un equilibrio con $p_1 > \frac{1}{2}$. Si $p_1 \leq \frac{1}{2}$, la única mejor respuesta del jugador 1 es $p_2 = 1$. Pero en este caso 1 tiene un incentivo a aumentar su precio. La no existencia de un equilibrio en estrategias mixtas se deja como ejercicio para el lector.

2.3. Juegos bilaterales de suma cero

Un juego bilateral de suma cero es un juego con dos jugadores en el cual todo resultado del juego representa pagos opuestos para los jugadores. Esto es, los jugadores tienen intereses opuestos.

Un ejemplo de juego de suma cero es el juego de cara y sello. Hay otros ejemplos más complejos e interesantes como el juego del ajedrez. Sin embargo, como veremos más adelante, se pueden obtener resultados bastante más fuertes para este caso que los que se obtienen del teorema de Von Neumann (1928) que exponemos en esta sección.

Definición 2.35. Un juego bilateral de suma cero es un juego $G = (\{1,2\}, \{\mathrm{S}_i\}_{i=1,2}, \{\pi_i\}_{i=1,2})$ tal que para todo $s \in S$, $\pi_1(s) + \pi_2(s) = 0$.

El requerimiento de sumar cero es una simplificación no fundamental, basta con que la suma sea constante. Por eso en ocasiones se llaman juegos bilaterales de suma constante. Es fácil ver que si la suma de los pagos es cero para las estrategias puras, también lo es para las estrategias mixtas (y viceversa).[6]

Teorema 2.36 (von Neumann, 1928)**.** Sea G una juego bilateral de suma cero. Entonces:

1. $\max\limits_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min\limits_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2) = \min\limits_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max\limits_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2)$. El primer valor lo denominamos el valor maxmin del jugador 1 y lo denotamos por v_1, el segundo lo denominamos el valor minmax del jugador 1 y lo denotamos por v_2. Luego el teorema afirma que en un juego de suma cero estos dos valores son iguales y denotamos el valor común por v_1^* denominado el valor del juego para el jugador 1.

2. Para todo equilibrio de Nash - Cournot (σ_1^*, σ_2^*) tenemos $v_1^* = \pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ y viceversa, si σ_1^*, σ_2^* son estrategias maxmin para cada jugador entonces (σ_1^*, σ_2^*) es un equilibrio de Nash - Cournot. En particular, todos los equilibrios de Nash - Cournot generan la misma utilidad.

Este teorema es equivalente al teorema Minmax de von Neumann que se encuentra más adelante.[7] Sin embargo, la demostración que se presenta en esta sección se basa en el teorema de existencia del equilibrio de Nash. El teorema Minmax y el teorema anterior son bastante anteriores al teorema de

[6] Algunos autores consideran una generalización de juegos de suma cero que denominan juegos estrictamente competitivos. Estos son juegos en los que los dos jugadores tiene preferencias opuestas por las alternativas (en estrategias puras). Estos juegos comparten muchas de la propiedades de los juegos de suma cero, pero en general la característica de ser competitivo no se extiende a estrategias mixtas.

[7] El teorema de von Neumann puede verse como un caso particular del teorema de dualidad en la teoría de optimización (véase Myerson, página 125). En efecto, existe una equivalencia entre juegos de suma cero y problemas de programación lineal.

Nash. De la demostración del teorema es fácil darse cuenta que el teorema se puede enunciar para cualquier juego en forma normal para el cual exista un equilibrio de Nash, sin apelar a estrategias mixtas.

La estrategia Maxmin para el jugador i refleja la estrategia de maximizar el pago para el jugador i bajo el supuesto de que el otro siempre va tratar de minimizar el pago de i. Este es el valor de seguridad del juego para el jugador que se discutió en el capítulo anterior. Intuitivamente, es lo máximo que el jugador i puede garantizar de utilidad para él mismo (en el peor caso).

La estrategia Minmax para el jugador i representa la menor utilidad a la que los demás jugadores, en caso de coordinar, pueden forzarlo.

El segundo resultado establece una relación muy particular en los juegos de suma cero. La estrategia maxmin, el resultado de una estrategia individualista, la máxima utilidad en el peor caso, coincide con el equilibrio de Nash. Esto le da solidez al concepto de equilibrio de Nash en juegos de suma cero.

Prueba. Primero demostramos que:

$$v_1 = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2) \leq v_2 = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2).$$

Por construcción $\min_{\sigma_2' \in \Sigma_2} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2') \leq \pi_1(\sigma_1, \sigma_2)$, luego

$$v_1 \leq \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2)$$

y, como el lado izquierdo es un número, podemos minimizar el lado derecho y se mantien la desigualdad y obtenemos:

$$v_1 \leq v_2$$

Obsérvese que en esta demostración no se usa que el juego es de suma cero. En efecto esta propiedad es válida para cualquier juego bilateral.

Para demostar que $v_1 \geq v_2$, sea (σ_1^*, σ_2^*) un equilibrio de Nash - Cournot. Vamos a demostrar que $v_1 \geq \pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq v_2$.

Para ver esto obsérvese que $v_1 = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2) \geq \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2) = \pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ (porque σ_2^* es una mejor respuesta para el segundo jugador dado que el primero juega σ_1^*) luego $v_1 \geq \pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$.

Por otro lado, $v_2 = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2) \leq \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2^*) = \pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ (porque σ_1^* es mejor respuesta para π_1 cuando el jugador 2 juega σ_2^*).

De la demostración anterior se sigue que, dado un equilibrio de Nash - Cournot (σ_1^*, σ_2^*), tenemos $v_1^* = \pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$. Sólo hace falta demostrar su converso, que un par de estrategias maxmin es un equilibrio de Nash-Cournot.

Sea $v = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2)$ el valor del juego. Sean (σ_1^*, σ_2^*) un par de estrategias tales que $\sigma_1^* \in \arg\max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2)$ y $\sigma_2^* \in \arg\min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2)$. Por definición, esto implica que para todo σ_1 se cumple $\pi_1(\sigma_1, \sigma_2^*) \leq v$ y análogamente se tiene que para todo σ_2 se cumple $\pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2) \geq v$. Como $\pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = v$, entonces σ_1^* es mejor respuesta para σ_2^* (pues alcanza el máximo de $\pi_1(\cdot, \sigma_2^*)$). Análogamente, σ_2^* es mejor respuesta para σ_1^* y por tanto es equilibrio de Nash-Cournot. ■

El teorema anterior implica que el valor del juego es el mismo para cada jugador independientemente de qué equilibrio de Nash jueguen. En efecto, no es necesario que los jugadores jueguen un equilibrio de Nash específico para que que se realice ese valor.

Más aún, del teorema se deduce fácilmente que si $(\sigma_1, \sigma_2), (\sigma_1', \sigma_2')$ son dos equilibrios de Nash entonces $(\sigma_1', \sigma_2), (\sigma_1, \sigma_2')$ son equilibrios de Nash. Es decir, basta con que cada jugador utilice como estrategia alguna que sea perteneciente a una estrategia conjunta que sea un equilibrio y que él espere que los demás hagan lo mismo y viceversa. Esta propiedad se conoce como *intercambiabilidad* del equilibrio en juegos bilaterales de suma cero. [8]

Ejercicio 2.37. Demostrar la propiedad de intercambiabildad del equilibrio para juegos de suma cero.

2.4. Aspectos normativos

Hasta ahora hemos analizado los equilibrios de los juegos sin detenernos a pensar en las características de los resultados. Muchos juegos pueden llevar a resultados que pueden considerarse como socialmente no deseados y, por esto, es necesario introducir formalmente un concepto que nos permita hacer conclusiones normativas de los resultados de las interacciones de los agentes.

Definición 2.38. En un juego en forma normal, una estrategia conjunta τ domina débilmente a σ en el sentido de Pareto si, para todo i :

$$\pi_i(\tau) \geq \pi_i(\sigma)$$

[8] Formalmente la intercambiabilidad implica que el conjunto de estrategias conjuntas que son equilibrios tiene la estructura de un producto cartesiano entre conjuntos de estrategias mixtas.

con desigualdad estricta para por lo menos un agente, y decimos que domina estrictamente en el sentido de Pareto si la desigualdad anterior la podemos cambiar por una desigualdad estricta.

Definición 2.39 (Eficiencia de Pareto)**.** En un juego en forma normal, una estrategia conjunta σ es eficiente en un sentido estrícto (o débil) si no existe una estrategia que la domine en el sentido de Pareto débilmente (estrictamente).

Una estrategia eficiente en un sentido estricto es también llamada eficiente en el sentido de Pareto. Luego una estrategia eficiente en el sentido de Pareto tiene la característica de que no es posible jugar algo diferente que mejore los pagos de un jugador sin que esto implique desmejorar los pagos de algún otro jugador.

Ejemplo 2.40 (Dilema del Prisionero)**.** El dilema del prisionero es un ejemplo clásico en el que el equilibrio de Nash es no es una estrategia eficiente en el sentido de Pareto.

1\2	A	C
A	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

El equilibrio de Nash de este juego es EN=(A,A). Sin embargo esta no es una estrategia Pareto eficiente: note que pasar a jugar (C,C) mejora el pago de ambos jugadores sin perjudicar a ninguno.

Definición 2.41. Un juego es un dilema del prisionero generalizado si existen dos estrategias conjuntas $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_N)$ y $\tau = (\tau_1, ..., \tau_N)$ tal que:

1. σ es un equilibrio en estrategias dominantes débilmente.
2. τ domina débilmente a σ en el sentido de Pareto.

Considere un juego en que cada jugador tiene una valoración privada de un mismo objeto. Suponga los jugadores conocen la valoración privada del objeto de todos los participantes. Los agentes hacen una oferta por el objeto y gana el objeto el agente que haga la oferta más alta y paga el segundo valor más alto de todas las ofertas. La utilidad para el ganador es su valoración menos lo que paga. Para los demás jugadores es cero (i.e., subasta al segundo precio con información completa). Por simplicidad supongamos que no existe un par de jugadores con la misma valoración. Este juego es un caso especial de una subasta al segundo precio de un único bien en el que hemos hecho el supuesto de que hay información completa. El subastador es quien recibe el pago y asigna el objeto. Suponemos que el subastador no hace parte del conjunto de jugadores.

Ejercicio 2.42. Demuestre que la subasta que acabamos de describir tiene un equilibrio en estrategias dominantes (débilmente) que consiste en ofertar la verdadera valoración.

Proposición 4. Una subasta al segundo precio como la que acabamos de describir, con información completa, es un dilema del prisionero generalizado (note que excluimos al subastador del conjunto de jugadores).

Prueba. Por el ejercicio anterior existe un equilibrio en estrategias dominantes débilmente (σ) que es ofertar la verdadera valoración de cada uno. Sea τ una estrategia que para cada jugador sea ofertar la mitad de su valoración. Entonces σ y τ satisfacen las propiedades de la defición de un dilema de los prisioneros generalizado. ■

En teoría de subastas, tema que estudiaremos con más profundidad más adelante, se muestra que la subasta al segundo precio es eficiente en el sentido de que el objeto se le asigna al jugador con la mayor valoración (incluso cuando existe un precio de reserva del objeto mayor o igual a cero). Estas dos formas de estudiar la eficiencia de la subasta al segundo precio no son contradictorias. El concepto que estudiamos aquí, dilema del prisionero generalizado, hace referencia a eficiencia exante y el que estudiaremos más adelante, a eficiencia expost.

2.5. Teorema Minimax de von Neumann*

En 1928, veinte años antes de la publicación del libro que básicamente funda la teoría de juegos von Neumann and Morgenstern (1947), von Neumann probo este teorema que es equivalente al teorema minmax anterior.

Teorema 2.43 (von Neumann 1928)**.** Sea $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots N;\ j=1,\ldots M}$ una matriz de números reales. Entonces existen $p \in R_+^N$, $q \in R_+^M$ y $v \in R$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = \sum_{j=1}^{M} q_j = 1 \tag{2.6}$$

y para todo i, j :

$$\sum_{i=1}^{N} p_i a_{ij} \geq v \geq \sum_{j=1}^{M} q_j a_{ij} \tag{2.7}$$

Proposición 5. El teorema Minmax de juegos de suma cero es equivalente al teorema minimax de von Neumann.

Prueba. Sea $\pi_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1^T A \sigma_2 = -\pi_2(\sigma_1, \sigma_2)$ y

$$v = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2) = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2). \tag{2.8}$$

Supongamos que para todo $p \in R_+^N$, $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$ existe j tal que:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i a_{ij} < v \tag{2.9}$$

en particular:

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_{1,i}^* a_{ij} < v \Rightarrow \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma_{1,i}^* a_{ij} \sigma_{2,j} < v \tag{2.10}$$

luego,

$$\min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \pi_1(\sigma_1, \sigma_2) < v \tag{2.11}$$

una contradicción. La otra desigualdad del teorema minmax es similar. ■

2.6. Ejercicios

1. Adivinar el promedio. Considere el siguiente juego. Cada jugador tiene que, de forma simultánea, escoger un número entero entre 1 y 100 (incluidos). La persona más cercana a un tercio del promedio de las ofertas gana $100 y los demás nada. En caso de empate, el premio se divide proporcionalmente entre los ganadores.

   a) ¿Existe alguna estrategia pura que domine estrictamente a cualquier otra?
   b) Encuentre una estrategia mixta que domine estrictamente a 100.
   c) Muestre que 99 no puede ser estrictamente dominado.
   d) ¿Cuál es su mejor predicción sobre el resultado de este juego?

2. Sea $\sigma^* \in \Sigma$ un perfil de estrategias completamente mixtas. ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? En caso verdadero, demuéstrelo formalmente; de lo contrario, dé un contraejemplo.

a) Si σ^* sobrevive al proceso de eliminación de estrategias mixtas estrictamente dominadas, entonces para todo i se tiene que $E_{-i}[\pi_i(s_i, \sigma^*_{-i})] = E_{-i}[\pi_i(\sigma^*_i, \sigma^*_{-i})], \forall s_i \in S_i$, donde S_i son las estrategias puras de i.

b) Si para todo i, σ^*_i es mejor respuesta a σ^*_{-i}, entonces σ^* sobrevive al proceso de eliminación iterada de estrategias mixtas estrictamente dominadas.

Solución:

a) Esta afirmación es falsa, porque una estrategia que sobreviva al proceso de eliminación iterada de estrategias mixtas estrictamente dominadas no es necesariamente es un equilibrio de Nash y, por lo tanto, no necesariamente satisfará la condición. Como contraejemplo tomemos el juego de cara y sello:

1\2	C	S
C	1,-1	-1,1
S	-1,1	1,-1

En primer lugar, en este juego ninguna estrategia pura ni mixta es estrictamente dominada, por lo que todas sobreviven al proceso de eliminación iterada de estrategias mixtas estrictamente dominadas. Para verificar esta afirmación, note que para cualquier estrategia completamente mixta del jugador 1 existe una estrategia del jugador 2 que le genera pagos esperados positivos y otra que le genera pagos esperados negativos al jugador 1. De esta forma, no puede ser el caso que exista algún $\tilde{\sigma}_1$ tal que que para todo σ_2 el pago esperado de 1, $\Pi_1(\tilde{\sigma}_1, \sigma_2)$, sea estrictamente mayor al de cualquier otra estrategia $\sigma_1 \neq \tilde{\sigma}_1$. En otras palabras, no puede haber una estrategia estrictamente dominante en este juego para el jugador 1 y, por simetría, tampoco existe para el jugador 2.

Ahora, el único equilibrio de Nash de este juego es el perfil de estrategias completamente mixtas: $\sigma_{EN} = (\sigma_{EN,1}, \sigma_{EN,2}) = (1/2, 1/2)$. Sea $\sigma^*_1 = (1/3, 2/3)$. Sabemos que esta estrategia sobrevivió al proceso de eliminación iterada de estrategias mixtas estrictamente dominadas y que no es un equilibrio de Nash, por lo que debe existir un $\tilde{\sigma}_2$ tal que:

$$\Pi_1(C, \tilde{\sigma}_2) \neq \Pi_1(\sigma_1^*, \tilde{\sigma}_2)$$
$$\text{o}$$
$$\Pi_1(S, \tilde{\sigma}_2) \neq \Pi_1(\sigma_1^*, \tilde{\sigma}_2)$$

Considere $\sigma_2^* = (1/3, 2/3)$. Entonces: $\Pi_1(C, \sigma_2^*) = -1/3$ y $\Pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = 1/9$, lo cual completa el contrajemplo.

b) Esta afirmación es verdadera, puesto que si para todo i, σ_i^* es mejor respuesta a σ_{-i}^*, entonces σ^* es un equilibrio de Nash. Por otro lado, se sabe que la eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas no elimina equilibrios de Nash, entonces σ^* tuvo que haber sobrevivido al proceso de eliminación.

3. Encuentre todos los equilibrios de Nash (tanto en estrategias puras como mixtas) del siguiente juego:

1\2	L	M	R
U	8,3	3,5	6,3
C	3,3	5,5	4,8
D	5,2	3,7	4,9

4. Considere el siguiente juego.

1\2	X_2	Y_2
X_1	2,2	0,6
Y_1	6,0	1,1

a) ¿Cuál es el equilibrio de Nash en puras?

b) Muestre que el equilibrio es ineficiente en el sentido de Pareto.

c) Suponga ahora que los jugadores se pueden comunicar y le piden a un abogado que les elabore un contrato que dice lo siguiente: si ambos lo firman, ambos prometen jugar (X_1, X_2). Si solamente uno lo firma, digamos i, entonces i promete jugar Y_i. En caso de firmar el contrato, es de obligatorio cumplimiento (e.g., no cumplirlo tiene una penalidad muy alta)

El nuevo juego es:

$1\backslash 2$	X_2	Y_2	S_2
X_1	2,2	0,6	0,6
Y_1	6,0	1,1	1,1
S_1	6,0	1,1	2,2

d) Encuentre el nuevo equilibrio.

e) ¿Qué aprendió usted de este ejercicio?

5. Considere el siguiente juego:

$1\backslash 2$	F	C
N	0,2	0,2
E	-1,-1	1,1

a) Calcular los equilibrios de Nash.

b) Calcular los equilibrios en estrategias mixtas.

6. Demuestre que, dado un juego en forma normal, para cada jugador todo equilibrio de Nash tiene un pago mayor o igual al valor minmax del jugador (no tiene que ser un juego bilateral ni un juego de suma cero).

Capítulo 3

Otros conceptos

Una de las debilidades de la teoría desarrollada hasta este punto es la multiplicidad de equilibrios que se pueden encontrar incluso en juegos muy sencillos. En este capítulo introducimos formas de eliminar algunos de estos equilibrios usando conceptos de solución más demandantes estratégicamente y/o epistemológicamente (i.e., nivel de conocimiento exigido).

3.1. Equilibrio perfecto

La eliminación de estrategias dominadas débilmente es difícil de justificar sobre la base del comportamiento puramente racional: una estrategia dominada débilmente puede ser un mejor respuesta a alguna estrategia de otro jugador. Luego, sólo si estamos seguros de que el otro jugador no va utilizar esa estrategia se justifica eliminarla. El concepto de equilibrio de Nash tampoco elimina estrategias dominadas débilmente: Puede existir un equilibrio de Nash tal que un jugador está utilizando un estrategia dominada débilmente. Para mayor ilustración consideremos el siguiente juego.[1]

Ejemplo 3.1 (Equilibrio de Nash dominado)**.**

1\2	A	B
a	1,1	0,-3
b	-3,0	0,0

La estrategia (b, B) es un equilibrio de Nash en el cual ambas estrategias son débilmente dominadas.

[1] Esta sección está basada en Mas-Colell et. al. [1995].

Vamos a ver que si suponemos cierta cautela por parte de los jugadores, en la medida que estos reconozcan que con cierta probabilidad sus adversarios pueden no jugar Nash, entonces es posible racionalizar la eliminación de estrategias dominadas débilmente.

Quisiéramos definir un concepto de equilibrio que sea robusto a cierto tipo de perturbaciones del juego que reflejan la posibilidad de que los jugadores puedan cometer errores. La definición que captura esta idea es la siguiente:

Definición 3.2 (Equilibrio perfecto en forma normal)**.** Sea $\epsilon_i : S_i \to (0,1)$ tal que $\sum_{s \in S_i} \epsilon_i(s) < 1$ y $\Delta_{\epsilon_i} = \{\sigma_i \in \Sigma(S_i) : \sigma_i(s) \geq \epsilon_i(s) \forall s \in S_i\}$. Es decir, Δ_{ϵ_i} es el conjunto de todas las estrategias mixtas con soporte completo y acotadas por debajo por ϵ_i. Denotamos por $G_\epsilon = \left(N, (\Delta_{\epsilon_i})_{i=1,\dots,N}, (\pi_i)_{i=1,\dots,N}\right)$ el juego perturbado por $(\epsilon_i)_{i=1,\dots,N}$

Decimos que σ es un equilibrio perfecto en forma normal si es un equilibrio de Nash y si existen sucesiones $\left(\epsilon_i^k\right)_{k=1,\dots,}$ y equilibrios de Nash σ^k de los juegos perturbados G_{ϵ^k} tal que:

1. $\lim_{k \to \infty} \epsilon_i^k(s) = 0 \ \forall i, s \in S_i$
2. $\lim_{k \to \infty} \sigma_i^k = \sigma_i$

En otras palabras, un juego perturbado es aquel en el que se juegan todas las estrategias puras con probabilidad positiva. De esta manera, la definición de equilibrio perfecto solo requiere que exista una sucesión de juegos perturbados y equilibrios de Nash de los juegos perturbados que converjan al juego original y estrategia candidata a ser un equilibrio perfecto. Intuitivamente la definición captura la idea de que los agentes pueden cometer errores (*trembling hand*) y por lo tanto evalúan juegos ligeramente perturbados donde los agentes le asignan probabilidad positiva a todas la estrategias puras.

La definición anterior puede resultar muchas veces difícil de trabajar porque requiere que se evalúen muchos juegos, por lo que la siguiente proposición puede ayudar a verificar si un equilibrio de Nash es perfecto.

Proposición 6. Sea $G = (N, (S_i)_{i=1,\dots,N}, (\pi_i)_{i=1,..,N})$ un juego en forma normal. Una estrategia conjunta $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ es un equilibrio perfecto (en forma normal) del juego G si y solamente si para cada jugador i existe $\left(\sigma_i^k\right)_{k=1,\dots,n}$ sucesión de estrategias mixtas de soporte completo tal que:

1. Para todo i, $\lim_{k \to \infty} \sigma_i^k = \sigma_i$

2. Para todo i y k, σ_i es la mejor respuesta cuando los demás juegan σ_{-i}^k.

Ejemplo 3.3. Considere el juego:

1\2	X	Y
Aa	0,1	0,1
Ab	0,1	0,1
Ba	-1,2	1,0
Bb	-1,2	2,3

(Aa, X) es un equilibrio perfecto en forma normal. Tome, por ejemplo, las sucesiones de estrategias mixtas con soporte completo $\sigma_1^k = (1-\frac{3}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ y $\sigma_2^k = (1-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ con $k = 4, 5, 6, ...$ Note que la suma de todos los componentes de la estrategia es uno y cada uno de estos está entre cero y uno, para todo k en el dominio definido. También es importante resaltar que esta es una estrategia completamente mixta ya que únicamente cuando $k \to \infty$ algunos componentes de la estrategia se vuelven cero.

Para probar que efectivamente se trata de un equilibrio perfecto se necesita mostrar que se cumplen las dos condiciones de la proposición anterior.

1. $\lim_{k\to\infty} \sigma_i^k = \sigma_i \quad \forall i$
   - $\lim_{k\to\infty} \sigma_1^k = \lim_{k\to\infty}(1 - \frac{3}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = (1, 0, 0, 0) = \sigma_1$
   - $\lim_{k\to\infty} \sigma_2^k = \lim_{k\to\infty}(1 - \frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = (1, 0) = \sigma_2$
2. Para todo i y k, σ_i es la mejor respuesta ante σ_{-i}^k.
   - Para el jugador 1:
     $\pi_1(Aa, \sigma_2^k) = (1 - \frac{1}{k}) * 0 + (\frac{1}{k}) * 0 = 0$
     $\pi_1(Ab, \sigma_2^k) = (1 - \frac{1}{k}) * 0 + (\frac{1}{k}) * 0 = 0$
     $\pi_1(Ba, \sigma_2^k) = (1 - \frac{1}{k}) * (-1) + (\frac{1}{k}) * 1 = -1 + \frac{2}{k}$
     $\pi_1(Bb, \sigma_2^k) = (1 - \frac{1}{k}) * (-1) + (\frac{1}{k}) * 2 = -1 + \frac{3}{k}$
     Note que tanto Ba como Bb tienen un pago que se va reduciendo en la medida que k crece. El pago más alto entonces lo tienen cuando $k = 4$ y para ambas estrategias este pago es menor que cero. Por lo tanto para $i = 1$ es verdad que $\sigma_1 = Aa$ es mejor respuesta para todo k.
   - Para el jugador 2:
     $\pi_2(\sigma_1^k, X) = (1 - \frac{3}{k}) * 1 + (\frac{1}{k}) * 1 + (\frac{1}{k}) * 2 + (\frac{1}{k}) * 2 = 1 + \frac{2}{k}$

$\pi_2(\sigma_1^k, Y) = (1 - \frac{3}{k}) * 1 + (\frac{1}{k}) * 1 + (\frac{1}{k}) * 0 + (\frac{1}{k}) * 3 = 1 + \frac{1}{k}$
Note que el pago de jugar X es igual al de de jugar Y más $\frac{1}{k}$, y como k es un número positivo, siempre va a ser mejor jugar X. Con esto se demuestra que $\sigma_2 = X$ es mejor respuesta para todo k.

Ejercicio 3.4. Considere el juego:

1\2	X	Y
Aa	0,2	0,2
Ab	0,2	0,2
Ba	-1,0	3,0
Bb	-1,-1	-1,-1

Encuentre todos los equilibrios perfectos en forma normal y las sucesiones de estrategias mixtas que los soportan.

Ejercicio 3.5. Demuestre que en todo equilibrio perfecto en forma normal ninguna estrategia débilmente dominada es jugada con probabilidad positiva.

Ejercicio 3.6. Demuestre que en un juego con únicamente dos jugadores todo equilibrio de Nash en el no se juegan estrategias débilmente dominadas con probabilidad positiva es un equilibrio perfecto en forma normal (véase Kreps, página 439).

Ejercicio 3.7. Considere el juego:

1\2	X	Y
A	2,2	2,2
BC	4,1	1,0
BD	0,0	0,1

Este juego tiene un equilibrio perfecto en formal normal pero no en forma extensiva (véase Capítulo 7).

Selten [1975] demostró que todo juego finito tiene un equilibrio perfecto en forma normal. En particular, todo juego finito tiene un equilibrio de Nash en el que ninguna estrategia débilmente dominada se juega con probabilidad positiva.

3.2. Equilibrio fuerte y equilibrio inmune a coaliciones

El concepto de equilibrio de Nash se basa en la idea de que, en equilibrio, no deben existir incentivos unilaterales a desviarse. Esto es, ningún jugador puede hallar beneficioso desviarse de la estrategia que le corresponde en Nash suponiendo que los demás mantienen fija la estrategia que les corresponde en Nash. Un generalización natural de esta idea es suponer que no existen incentivos a que ningún grupo de personas (i.e., coaliciones) se desvien de las estrategias que a ese grupo les corresponde cuando se supone que los que están fuera de la coalición mantiene sus estrategias fijas. La siguiente definición formaliza esa idea.

Definición 3.8 (Equilibrio fuerte)**.** Una estrategia conjunta $\widehat{\sigma}$ es un equilibrio fuerte si para todo $C \subset N$ no existe una estrategia conjunta $(\sigma_i)_{i \in C}$ tal que:

$$\pi_i((\sigma_i)_{i \in C}, \widehat{\sigma}_{N \setminus C}) > \pi_i(\widehat{\sigma}), \ \forall i \in C$$

Podemos deducir inmediatamente de la definición que un equilibrio fuerte es eficiente débilmente en el sentido de Pareto.

Ejemplo 3.9. Este juego tiene un único equlibrio fuerte pero dos equilibrios de Nash.

1\2	A	B
A	1,1	0,0
B	0,0	4,4

Este es un concepto de equilibrio muy fuerte (no existe en el caso del Dilema de los Prisioneros) y pueden darse otro tipo de dificultades como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.10 (Bernheim, Peleg y Whinston 1987)**.** Considere el siguiente juego entre tres individuos.

1\2	A	B	1\2	A	B
X	0,0,10*	-5,-5,0	X	-2,-2,0	-5,-5,0
Y	-5,-5,0	1,1,4	Y	-5,-5,0	-1,-1,5*
	M		3	N	

En este juego existen dos equilibrios de Nash - Cournot y uno de ellos domina al otro. Ninguno de los dos equilibrios de Nash - Cournot es un equilibrio fuerte pero el equilibrio dominado tiene algunas características que motivan el próximo concepto de equilibrio que introduciremos.

Para ver que el primer equilibrio (X,A,M) no es un equilibrio fuerte, obsérvese que 1 y 2 tienen un incentivo a desviarse. El segundo equilibrio claramente no es un equilibrio fuerte. Ahora, considere los incentivos a desviarse del segundo equilibrio (dominado) al primero. Los tres jugadores tienen incentivos para desviarse al equilibrio dominante. Ahora, si los jugadores 1 y 2 creen que el jugador 3 va jugar M, la idea del equilibrio fuerte nos sugiere que 1 y 2 tendrían el incentivo a desviarse juntos y jugar Y, B respectivamente. Pero si el jugador 3 internaliza ese argumento entonces preferiría jugar N y volvemos al equilibrio ineficiente.

El problema de tipo conceptual identificado en el anterior ejemplo motiva la introducción de un concepto más débil.

Definición 3.11 (Equilibrio inmune a coaliciones informalmente)**.** Una estrategia conjunta es un equilibrio inmune a coaliciones si:

1. Es un equilibrio de Nash - Cournot.
2. No existen incentivos a desviaciones bilaterales admisibles. Una desviación bilateral es admisible si es un equilibrio de Nash - Cournot del juego reducido de dos jugadores donde todos los demás jugadores tienen sus estrategias fijas.
3. No existen desviaciones trilaterales admisibles. Una desviación trilateral es admisible si no existen incentivos a desviaciones bilaterales admisibles ni a desviaciones unilaterales admisibles.
4. Así sucesivamente *ad infinitum*.

Ciertamente este es un concepto de equilibrio más débil que el concepto de equilibrio fuerte (menos desviaciones estratégicas del candidato a equilibrio son admisibles). Notemos que, por ejemplo, en el dilema de los prisioneros no existe un equilibrio fuerte pero el equilibrio en estrategias dominadas sí es un equilibrio inmune a coaliciones.

En el último ejemplo de las anteriores notas el equilibrio (Y, B, N) es un equilibrio inmune a coaliciones. Para ver esto verifiquemos las condiciones de la definición anterior. (Y, B, N) es un equilibrio de Nash y no existen incentivos bilaterales a desviarse (menos aún a desviaciones bilaterales admisibles). Ahora, considere los incentivos a una desviación de la coalición de todos los jugadores. Claramente existe un incentivo a moverse al equilibrio de Nash - Cournot (X, A, M).

Preguntémonos entonces si esta desviación es admisible. Para ser admisible no debería de haber ningún incentivo a desviaciones bilaterales admisibles. Sin embargo, los jugadores 1 y 2 si tiene un incentivo a desviarse y esta desviación sí es admisible pues es un equilibrio de Nash - Cournot del subjuego que definen ellos dos.

Este es un concepto muy fuerte de equilibrio y deja de existir en muchas circunstancias. Un resultado interesante de Moreno y Wooders (1996) afirma que si en el conjunto de estrategias no dominadas iterativamente existe una que domina débilmente a todas las demás, entonces esta estrategia es un equilibrio inmune a coaliciones.

3.3. Juegos con contratos

Considere el siguiente juego.

1\2	X_2	Y_2
X_1	2,2	0,6
Y_1	6,0	1,1

(Y_1, Y_2) es un equilibrio de Nash, pero la ineficiencia del equilibrio motiva la introducción de un mecanismo de coordinación. Una forma de hacer esto es permitir que los jugadores se comuniquen. Esto puede hacerse con un espacio de estrategias muy complicado. Una alternativa es suponer que la comunicación se manifiesta en la posibilidad de firmar contratos de obligatorio cumplimiento. Esto quiere decir que firmar el contrato es comprometerse a los pagos que este establece.[2] Sin embargo, la firma del contrato es un decisión voluntaria (una estrategia posible).

Suponga que se introduce un contrato: si ambos lo firman ambos prometen jugar (X_1, X_2). Si solamente uno lo firma, digamos i, entonces i promete jugar Y_i. El nuevo juego es:

[2]Los pagos deben ser realizables a partir de los resultados posibles del juego original. De lo contrario, introduciendo resultados nuevos, se podría lograr cualquier cosa.

1\2	X_2	Y_2	S_2
X_1	2,2	0,6	0,6
Y_1	6,0	1,1	1,1
S_1	6,0	1,1	2,2

Ahora (S_1, S_2) es un equilibrio de Nash (de hecho un equilibrio perfecto). Ahora, suponga que se introduce un contrato adicional: si ambos lo firman, entonces se lanza una moneda al aire. Si cae cara, juegan (X_1, Y_2). Si cae sello, juegan (Y_1, X_2). Si solamente uno firma este segundo contrato, digamos i, entonces i promete jugar Y_i. El nuevo juego es:

1\2	X_2	Y_2	S_2	S‘$_2$
X_1	2,2	0,6	0,6	0,6
Y_1	6,0	1,1	1,1	1,1
S_1	6,0	1,1	2,2	1,1
S‘$_1$	6,0	1,1	1,1	3,3

Ahora $(S_1, S_2), (S_1', S_2')$ son equilibrios de Nash (de hecho, equilibrios perfectos) y existe un tercer equilibrio en el cual cada jugador juega la estrategia mixta $(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

3.4. Equilibrio correlacionado

Considere el siguiente juego.

1\2	A	B
X	**5,1**	0,0
Y	4,4	**1,5**

Este juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (X, A) y (Y, B). Además existe un equilibrio simétrico en estrategias mixtas $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ cuyo pago esperado es $\frac{5}{2}$ para cada jugador. Este último es ineficiente pues la estrategia (Y, A) tiene un mayor pago para ambos jugadores. Obsérvese que este equilibrio en estrategias mixtas le asigna una probabilidad positiva a (X, B). Vamos a ver que esta ineficiencia en parte se le puede atribuir a la selección aleatoria independiente que hacen los dos jugadores en sus estrategia mixtas.

Suponga que existe un mecanismo que permite coordinar las acciones de los jugadores en este juego del siguiente estilo: al tirar una moneda al aire, si cae cara se juega (X, A) si cae sello, (Y, B). El valor esperado de cada jugador sería 3, lo que es mejor que la estrategia mixta, pero aún es ineficiente pues (Y, A) sigue teniendo un mayor pago para ambos jugadores. Si ambos acordaran la utilización de este mecanismo, este sería un equilibrio en el sentido de que no existen incentivos a desviarse.

¿Es posible acordar un mecanismo que sea un equilibrio y tal que el pago esperado sea aún mejor? Si el mecanismo permite dar señales privadas a cada jugador, la respuesta es sí. Vamos a demostrar que si se utiliza un mecanismo de coordinación con señales privadas existe un equilibrio (que definimos más adelante) en el cual la utilidad de cada individuo es $3.\overline{3}$.

La diferencia entre un mecanismo con señales privadas o públicas quedará clara más adelante una vez definamos formalmente el concepto de recomendaciones. Por el momento, notemos que en el mecanismo descrito los agentes podrían intentar desviaciones de la recomendación condicionales a las recomendaciones que el mecanismo le hace a los demás jugadores. En un mecanismo privado, las posibles desviaciones son únicamente condicionales a la recomendaciones privadas que el jugador recibe (es decir, no se puede planear una estrategia dependiendo de las recomendaciones a los demás porque estas no son observadas). Un ejemplo clásico de un mecanismo de coordinación con señales públicas son las señales de un semáforo en una intersección de dos vías.

Definición 3.12 (Mecanismo de coordinación estocástico)**.** Un mecanismo de coordinación estocástico M para un juego en forma estratégica G es un espacio de probabilidad $(\Omega, \{P_i\}_{i=1,...N}\ , p)$ donde Ω es un universo de eventos, $P = \{P_i\}_{i=1,...N}$ es una partición de Ω y p es una probabilidad sobre la partición.[3]

El mecanismo de coordinación estocástico tiene como objeto permitir la coordinación de las estrategias con base en recomendaciones dadas a cada jugador $\gamma_i : \Omega \to \Sigma_i$ y donde cada jugador conoce la distribución conjunta de las funciones de recomendación. Más precisamente, los jugadores conocen el mecanismo de coordinación estocástico y por lo tanto pueden deducir la distribución conjunta de las funciones de recomendación.

Definición 3.13 (Equilibrio correlacionado)**.** Dado un mecanismo de coordinación estocástico M, un equilibrio correlacionado es un recomendación para cada jugador $\gamma_i : \Omega \to \Sigma_i$, medible con respecto P, tal que para todo

[3] Más formalmente, sobre la $\sigma-$ álgebra generada por la partición $\{P_i\}_{i=1,...,N}$.

$\widetilde{\gamma}_i : \Omega \to \Sigma_i$ medible con respecto a P:

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)\overline{\pi}_i\left(\gamma(\omega)\right) \geq \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)\overline{\pi}_i\left(\widetilde{\gamma}_i\left(\omega\right), \gamma_{-i}\left(\omega\right)\right)$$

Donde $\gamma(\omega) = (\gamma_1(\omega), ..., \gamma_N(\omega))$.En otras palabras, la idea es dar una recomendación privada a los jugadores en donde las probabilidades de cada recomendación son conocidas por todos los agentes. A partir de estas probabilidades los agentes calculan su pago esperado y evalúan si tienen incentivos a seguir la recomendación o no.

Ejemplo 3.14. Considere el juego anterior y el siguiente mecanismo de coordinación estocástico, $\mathcal{M} = (\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{P_1, P_2\}, p)$ donde $P_1 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}\}$, $P_2 = \{\{\omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2\}\}$ y p es la distribución de probabilidad uniforme sobre $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ (obsérvese que la $\sigma-$ álgebra generada por la partición es partes de Ω). Ahora considere las siguientes recomendaciones: $\gamma_1(\omega_1) = X$ y $\gamma_1(\omega_2) = \gamma_1(\omega_3) = Y$; y $\gamma_2(\omega_3) = B$ y $\gamma_2(\omega_1) = \gamma_2(\omega_2) = A$. Entonces la recomendación conjunta (γ_1, γ_2) es un equilibrio correlacionado para el mecanismo de coordinación estocástico $\mathcal{M}$. Para ver esto mostremos que ningún jugador tiene incentivos a desviarse. Para el jugador 1, sea $\widetilde{\gamma}$ una recomendación medible con respecto a P_1. Es fácil verificar para las diferentes alternativas de $\widetilde{\gamma}$ que no existen incentivos a desviarse. Para el jugador 2 se hace una verificación similar.

La condición que define el concepto de equilibrio correlacionado se puede escribir de la siguiente forma:

$$E_p\left[\overline{\pi}_i\left(\gamma\right)\right] \geq E_p\left[\overline{\pi}_i\left(\widetilde{\gamma}_i, \gamma_{-i}\right)\right],$$

donde el valor esperado se calcula con respecto a la distribución p.

Observemos también que la siguiente definición es equivalente a la definición anterior, lo que sugiere que el espacio de eventos Ω no es esencial.

Definición 3.15 (Mecanismo de coordinación estocástico en forma reducida)**.** Un mecanismo de coordinación estocástico (en forma reducida) para un juego en forma normal es una distribución de probabilidad $\overline{p} : \Sigma_1 \times ... \times \Sigma_N \to [0, 1]$. Por simplicidad vamos a considerar únicamente el caso en el que la distribución es de soporte finito.

Definición 3.16 (Equilibrio correlacionado en forma reducida)**.** Un equilibrio correlacionado es un mecanismo de coordinación estocástico $\overline{p} : \Sigma_1 \times$

$... \times \Sigma_n \rightarrow [0,1]$ tal que para toda función de recomendaciones para cada jugador $\overline{\gamma}_i : \Sigma_i \rightarrow \Sigma_i$ se tiene:

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} \overline{p}(\sigma)\overline{\pi}_i(\sigma) \geq \sum_{\sigma \in \Sigma} \overline{p}(\sigma)\overline{\pi}_i(\overline{\gamma}_i(\sigma_i), \sigma_{-i})$$

Ejercicio 3.17. Demostrar la equivalencia de las dos definiciones de equilibrio correlacionado.

Observemos que para verificar que no hay incentivos a desviarse en un equilibrio correlacionado basta con verificar que no existen incentivos a desviarse de las recomendaciones a estrategias puras. Podemos interpretar este concepto de equilibrio de la siguiente forma: cada jugador recibe de forma privada una recomendación para jugar σ_i y todos saben que la probabilidad con la que el mecanismo recomienda cualquier estrategia conjunta es $\overline{p} : \Sigma_1 \times ... \times \Sigma_n \rightarrow [0,1]$. Luego, un equilibrio correlacionado es uno en el que ningún jugador tiene un incentivo a utilizar una función de recomendación distinta a la función identidad.

Todo equilibrio de Nash es un equilibrio correlacionado. Sea $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_N^*)$ un equilibrio de Nash. Entonces si definimos $\Omega = \prod_i S_i$ y $p = \sigma_1^* \times ... \times \sigma_N^*$ este es un mecanismo de coordinación que soporta el equilibrio correlacionado donde la recomendación es la función constante $\gamma_i = \sigma_i^*$.

Hay otra forma de representar un equilibrio de Nash como un equilibrio correlacionado (considere el espacio de estados como las estrategias mixtas conjuntas y suponga que el mecanismo de coordinación se concentra en el equilibrio de Nash). Cuando existen varios equilibrios de Nash, cualquier distribución sobre estos es un equilibrio correlacionado. Cuando el mecanismo de coordinación es público estos son los únicos equilibrios correlacionados que existen.

La idea de un equilibrio correlacionado con señales públicas es idéntica a la definición anterior excepto que a los jugadores se les permite utilizar recomendaciones de la forma $\overline{\gamma}_i : \Sigma \rightarrow \Sigma_i$. Se sigue que el conjunto de equilibrios correlacionados que utilizan un mecanismo de coordinación público es un subconjunto del conjunto de equilibrios correlacionados que utilizan un mecanismo de coordinación privado.

Ejemplo 3.18. Reescribamos el ejemplo anterior como un equilibrio correlacionado en forma reducida. Para esto, basta con deducir la distribución conjunta de las dos recomendaciones (variable aleatorias) sobre el conjunto de estrategias mixtas. Esa distribución conjunta es el equilibrio correlacionado en forma reducida. En este caso le asigna probabilidad $\frac{1}{3}$ a $((1,0),(1,0))$, $((0,1),(1,0)),((0,1),(0,1))$ y probabilidad cero a $((1,0),(0,1))$.

Ejercicio 3.19. Este ejercicio usa el teorema de Bayes, el cual será introducido más adelante. Sin embargo, para aquellos que tengan conocimientos básicos en análisis Bayesiano, este ejercicio ofrece una perspectiva diferente del concepto de equilibrio correlacionado. El ejercicio es prerrequisito para entender el siguiente ejemplo. Sea $\bar{p}$ un mecanismo de correlación estocástico. Por el teorema de Bayes:

$$\bar{p}(\sigma_{-i} \mid \sigma_i) = \frac{\bar{p}(\sigma_i, \sigma_{-i})}{\sum\limits_{\sigma_{-i}\in\Sigma_{-i}} \bar{p}(\sigma_i, \sigma_{-i})}$$

Utilizando esta probabilidad condicional podemos dar la siguiente interpretación del concepto de equilibrio correlacionado. Cada agente es informado de su recomendación, pero no de la recomendación de los demás. Entonces $\bar{p}(\sigma_{-i} \mid \sigma_i)$ es la probabilidad que el jugador i asigna a que a los demás jugadores les hayan recomendado σ_{-i} cuando su recomendación fue σ_i.

Demuestre que la siguiente definición de equilibrio implica la definición de equilibrio correlacionado dada anteriormente. Decimos que $\bar{p}$ es un equilibrio correlacionado si para todo $\sigma_i, \sigma_i' \in \Sigma_i$:

$$\sum_{\sigma_{-i}\in\Sigma_{-i}} \bar{p}(\sigma_{-i} \mid \sigma_i)\overline{\pi}_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}\right) \geq \sum_{\sigma_{-i}\in\Sigma_{-i}} \bar{p}(\sigma_{-i} \mid \sigma_i)\overline{\pi}_i\left(\sigma_i', \sigma_{-i}\right)$$

La anterior equivalencia de hecho facilita la prueba de la siguiente proposición.

Proposición 7. Suponga que $ES \neq \emptyset$. Entonces, existe un único equilibrio correlacionado, y es aquel que soporta al único elemento de ES.

Prueba. Sea $s \in S$ el (único) equilibrio en estrategias dominantes. Considere el mecanismo de coordinación estocástico $\bar{p} : \Sigma_1 \times ... \times \Sigma_n \to [0,1]$ dado por

$$\bar{p}(\sigma) = 1_{\{s\}}(\sigma)$$

Probemos inicialmente que este es un equilibrio correlacionado. Sea $i \in N$ y $\bar{\gamma}_i : \Sigma_i \to \Sigma_i$ una función de recomendación. Luego, note que

$$\sum_{\sigma\in\Sigma}\bar{p}(\sigma)\bar{\pi}_i(\bar{\gamma}_i(\sigma_i), \sigma_{-i}) = \bar{\pi}_i(\bar{\gamma}_i(s_i), s_{-i}) \leq \bar{\pi}_i(s_i, s_{-i}) = \sum_{\sigma\in\Sigma}\bar{p}(\sigma)\bar{\pi}_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

Donde en la primera y última igualdad hemos usado el hecho de que $\bar{p}$ es degenerada en s y la desigualdad se debe a que s_i es estrictamente dominante. Ahora, veamos que este es de hecho el único equilibrio correlacionado. Suponga hacia contradicción que existe otro equilibrio correlacionado distinto $\bar{q} : \Sigma_1 \times ... \times \Sigma_n \to [0,1]$. Luego $\exists \hat{\sigma} \in \Sigma \setminus \{s\}$ tal que $\bar{q}(\hat{\sigma}) > 0$. En particular, esto implica que $\exists i^* \in N : \ \hat{\sigma}_{i^*} \neq s_{i^*}$ y para este i^* se satisface por dominancia estricta de s_{i^*} que $\bar{\pi}(\hat{\sigma}_{i^*}, \hat{\sigma}_{-i^*}) < \bar{\pi}(s_{i^*}, \hat{\sigma}_{-i^*})$. Considere la función de recomendación $\bar{\gamma}_{i^*} : \Sigma_{i^*} \to \Sigma_{i^*}$ dada por $\bar{\gamma}_{i^*}(\sigma_{i^*}) = s_{i^*}$. Entonces,

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} \bar{q}(\sigma)\bar{\pi}_i(\sigma_{i^*}, \sigma_{-i^*}) < \sum_{\sigma \in \Sigma} \bar{q}(\sigma)\bar{\pi}_{i^*}(s_{i^*}, \sigma_{-i^*}) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \bar{q}(\sigma)\bar{\pi}_{i^*}(\bar{\gamma}_{i^*}(\sigma_{i^*}), \sigma_{-i^*})$$

Lo que contradice que $\bar{q}$ sea un equilibrio correlacionado.

■

Resta responder si el anterior resultado se extiende o no al caso de dominancia débil. Para ello, basta explotar el hecho de que la existencia de un equilibrio en estrategias débilmente dominantes no implica unicidad del equilibrio de Nash.

Ejercicio 3.20. Demuestre que la existencia de un equilibrio en estrategias débilmente dominantes no implica unicidad del equilibrio correlacionado.

Ejemplo 3.21 (Juego de la gallina)**.** Este juego sirve para ilustrar que los equilibrios correlacionados pueden darle probabilidad positiva a estrategias conjuntas que no son equilibrios Nash (incluso una probabilidad alta) y mejorar el pago esperado de todos los jugadores. Considere el siguiente juego:

1\2	**C**hicken out	**D**are
Chicken out	6,6	2,7
Dare	7,2	0,0

Este juego describe la situación en la que se encuentran dos pilotos que van directo uno contra el otro. Si uno de los dos se acobarda (Chicken out) y esquiva al otro mientras que el segundo mantiene el rumbo, el cobarde recibe un pago bajo y el que mantuvo el rumbo, un pago alto. Si ambos mantienen el rumbo, colisionan, por lo que el pago es bajo para ambos. Si ambos se acobardan, hacen como si nada hubiera pasado y el pago es alto para ambos.

Este juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras, y uno en mixtas:

$$EN = \left\{(D,C),(C,D),\left(\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right)\right\}$$

El pago que recibe cada uno de los jugadores en cada uno de los equilibrios es el siguiente:

$$
\begin{array}{c|c}
\pi_1(C,D) = 2 & \pi_2(C,D) = 7 \\
\pi_1(D,C) = 7 & \pi_2(D,C) = 2 \\
\pi_1\left(\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right) = 4.\bar{6} & \pi_2\left(\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right) = 4.\bar{6}
\end{array}
$$

De estos pagos es posible ver que los dos Nash en puras llevan a resultados muy desiguales entre los jugadores y que el pago del equilibrio en mixtas, aunque es más equitativo, es bajo. Por este motivo, puede ser interesante intentar combinar los equilibrios de Nash con la estrategia conjunta (C, C) para mejorar los pagos de los jugadores. El riesgo es que, como (C, C) no es un equilibrio de Nash, al darle una probabilidad alta, los jugadores tengan incentivos a desviar.

Probemos que la siguiente recomendación es un equilibrio correlacionado.

$$
\gamma = \begin{cases} (C,C) & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \\ (D,C) & \text{con probabilidad } \frac{1}{4} \\ (C,D) & \text{con probabilidad } \frac{1}{4} \end{cases}
$$

- Jugador 1

  1. Cuando la recomendación es jugar C.
     En este caso el jugador uno no sabe si el otro recibió la recomendación de jugar C o D. Por este motivo usamos Bayes:

     $P(\gamma_2 = C \mid \gamma_1 = C) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

     $P(\gamma_2 = D \mid \gamma_1 = C) = \frac{1}{3}$

     a) Pago esperado de seguir la recomendación:

     $$\pi_1(s_1 = \gamma_1, s_2 = \gamma_2 \mid \gamma_1 = C) = \frac{2}{3} * 6 + \frac{1}{3} * 2 = \frac{14}{3}$$

     b) Pago esperado de desviar:

     $$\pi_1(s_1 = D, s_2 = \gamma_2 \mid \gamma_1 = C) = \frac{2}{3} * 7 + \frac{1}{3} * 0 = \frac{14}{3}$$

   c) Conclusión: el jugador 1 no tiene incentivos a desviar porque $\frac{14}{3} = \frac{14}{3}$.

2. Cuando la recomendación es jugar D.
   En este caso el jugador 1 sabe que al otro le recomendaron jugar C.

   a) Pago esperado de seguir la recomendación:

   $$\pi_1(s_1 = \gamma_1, s_2 = \gamma_2 \mid \gamma_1 = D) = 7$$

   b) Pago esperado de desviar:

   $$\pi_1(s_1 = C, s_2 = \gamma_2 \mid \gamma_1 = C) = 6$$

   c) Conclusión: como $6 < 7$ no hay incentivos a desviar.

- Jugador 2

1. Cuando la recomendación es jugar C. En este caso el jugador dos no sabe si el otro recibió la recomendación de jugar C o D. Por este motivo usamos Bayes:

   $P(\gamma_1 = C \mid \gamma_2 = C) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

   $P(\gamma_1 = D \mid \gamma_2 = C) = \frac{1}{3}$

   a) Pago esperado de seguir la recomendación:

   $$\pi_2(s_1 = \gamma_1, s_2 = \gamma_2 \mid \gamma_2 = C) = \frac{2}{3} * 6 + \frac{1}{3} * 2 = \frac{14}{3}$$

   b) Pago esperado de desviar:

   $$\pi_2(s_1 = \gamma_1, s_2 = D \mid \gamma_2 = C) = \frac{2}{3} * 7 + \frac{1}{3} * 0 = \frac{14}{3}$$

   c) Conclusión: el jugador 2 no tiene incentivos a desviar porque $\frac{14}{3} = \frac{14}{3}$.

2. Cuando la recomendación es jugar D. En este caso dos sabe que uno recibió la recomendación de jugar C

a) Pago esperado de seguir la recomendación:

$$\pi_2(s_1 = \gamma_1, s_2 = \gamma_2 \mid \gamma_2 = D) = 7$$

b) Pago esperado de desviar:

$$\pi_2(s_1 = \gamma_1, s_2 = C \mid \gamma_2 = D) = 6$$

c) Conclusión: como $6 < 7$ dos no tienen incentivos a desviar.

De esta manera se concluye que γ es un equilibrio correlacionado. Calculemos el pago esperado para los jugadores de que se juegue este equilibrio:

- Jugador 1

$$\pi_1(s_1 = \gamma_1, s_2 = \gamma_2) = \frac{1}{2} * 6 + \frac{1}{4} * 7 + \frac{1}{4} * 2 + \frac{0}{4} * 0 = 5{,}25$$

- Jugador 2

$$\pi_2(s_1 = \gamma_1, s_2 = \gamma_2) = \frac{1}{2} * 6 + \frac{1}{4} * 2 + \frac{1}{4} * 7 + \frac{0}{4} * 0 = 5{,}25$$

Este pago es más alto que cualquier pago construido a partir de una combinación convexa de equilibrios de Nash. El diagrama de la siguiente página (Maschler et al., 2013) muestra que efectivamente este es el pago simétrico más alto que se puede conseguir en este juego con un equilibrio correlacionado.

Ejercicio 3.22. En el ejemplo de la batalla de los sexos

1. Determine si $p((1,0),(1,0)) = \frac{3}{8}$, $p((0,1),(1,0)) = \frac{1}{4}$ y $p((0,1),(0,1)) = \frac{3}{8}$ (todo lo demás cero) es un equilibrio correlacionado.

2. Demuestre que el conjunto de equilibrios correlacionados es conjunto convexo.

3. Demuestre que la intersección de este conjunto con el conjunto de las distribuciones de probabilidad correlacionadas es igual al conjunto de equilibrios de Nash.

   Este ejercicio pone en evidencia dos propiedades geométricas genéricas de los equilibrios correlacionados.

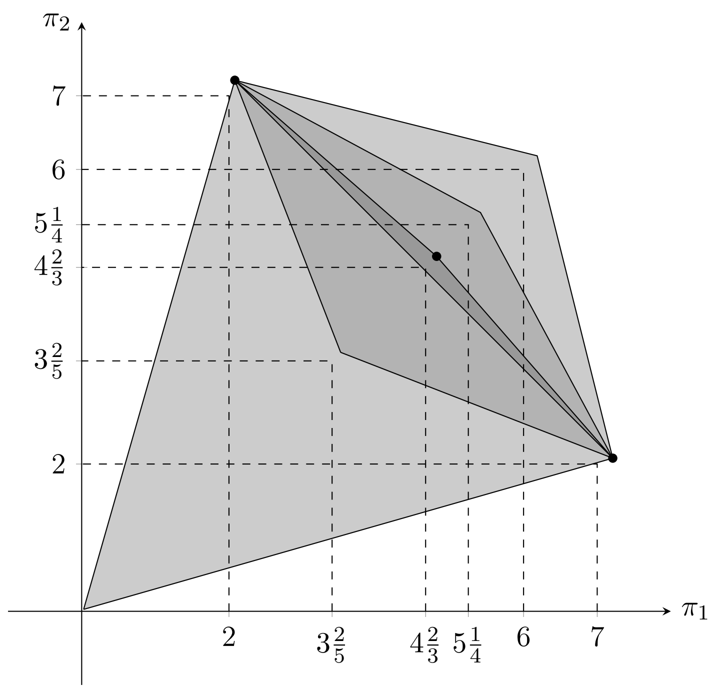


Figura 3.1: Pagos del Juego de la Gallina. En gris claro se encuentran los pagos posibles del juego, en gris más oscuro los pagos que se pueden conseguir con equilibrios correlacionados, y en gris oscuro los pagos que vienen de combinaciones convexas de equilibrios de Nash. Fuente: Mascheler et. al, 2013

Una característica sobresaliente de la definición de equilibrio correlacionado es que le da un papel importante a las asimetrías de información. Específicamente, en un equilibrio correlacionado todos los jugadores usan una recomendación distinta. El siguiente ejemplo resalta el papel que juegan las asimetrías de información en situaciones estratégicas. En particular, vamos a ver que perder información expost puede tener como consecuencia una ganancia en eficiencia.

Ejemplo 3.23 (Valor de la información)**.** Considere el juego de la siguiente figura.

3	M			N			Q		
	1\2	A	B	1\2	A	B	1\2	A	B
	X	0,0,3	0,0,0	X	2,2,2	0,0,0	X	0,0,0	1,1,1
	Y	1,1,1	0,0,0	Y	0,0,0	2,2,2	Y	0,0,0	0,0,3

Tabla Página 60 Vega

Este juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (Y, A, M) y (X, B, Q). Ambos equilibrios tiene un pago neto de 1 para cada jugador. Existen, sin embargo, estrategias conjuntas que dominan a ambos equilibrios: (X, A, N), (Y, B, N). Consideremos ahora el siguiente mecanismo de coordinación estocástico (en forma reducida): $p(X, A, N) = p(Y, B, N) = \frac{1}{2}$. Entonces p soporta un equilibrio correlacionado con pago esperado 2 para cada jugador.

Ahora supongamos que 3 se le da la opción de pagar por conocer la recomendación puntual que el mecanismo le hace a los otros dos jugadores. En este caso 3 respondería de la siguiente forma: Si los otros dos juegan (X, A), él juega M, y si juegan (Y, B), él juega Q. Luego, si los otros dos jugadores son informados de que 1 ha comprado esta opción, ciertamente no jugaran las estrategias recomendadas y no habrá coordinación, lo que impide que los jugadores obtengan un pago de 2. Así, la opción de obtener más información para 3 no tiene ningún valor.

Ejercicio 3.24. Considere el siguiente juego que representa los pagos posibles de dos conductores que se acercan a una intersección.

H\1	C	S
C	-100,-100	1,0
S	0,1	0,0

1. Demuestre que este juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras y uno en mixtas.

2. Calcule un equilibrio correlacionado.

3.5. Juegos Evolutivos

La teoría de juegos clásica supone formas de racionalidad y conocimiento muy fuertes. Una forma de racionalizar este comportamiento y desviaciones del mismo es suponer que el comportamiento subóptimo es eventualmente desplazado por formas de razonar o conocimiento que permiten una mejor adaptación a las interacciones estratégicas que los agentes enfrentan. Vamos a estudiar una teoría estática inspirada en ideas evolucionarias que pueden ser un buen modelo en ciertas circunstancias.

Considere el siguiente juego bilateral simétrico $G = (\{1,2\}, \pi)$ entre dos animales exante idénticos. Sus estrategias son actuar como pequeño o como grande:

1\2	S	L
S	5,5	1,8
L	8,1	3,3

Decimos que una estrategia s es un Equilibrio Evolucionario Estable (EEE) si para todo s' existe un umbral $\bar{\epsilon} > 0$ tal que si $\bar{\epsilon} > \epsilon > 0$:

$$\pi(s, (1-\epsilon)s + \epsilon s')) > \pi(s', (1-\epsilon)s + \epsilon s')$$

Intuitivamente, si la población (exante) utiliza como estrategia s y surge una población pequeña de agentes que juegan s' (por ejemplo, debido a una mutación) y la población exante anticipa que la nueva población (expost) va ser invadida en una pequeña fracción $\bar{\epsilon}$ o menos, el pago esperado para la población de usar s' es estrictamente menor que s.

S no es EEE. L si lo es. Obsérvese que (S, S) genera pagos mayores, lo que sugiere una mejor adaptación de los agentes. Sin embargo, es una adaptación frágil. Una mutación que introduce L en una población de S se beneficia de que la mayoría de las interacciones que L encuentra son con S (L está mejor adaptado que S). A su vez, una mutación que introduce S en una población de L se ve afectada por el hecho de que la mayoría de las interacciones que S encuentra son con L (L está mejor adaptado que S).

Lo que parece sorprendente es que si inicialmente la población está compuesta por agentes s, con el tiempo su adaptabilidad decrecería. Esto no contradice la hipótesis principal de la idea de evolución según la cual con el tiempo los agentes incrementan su adaptabilidad a un ambiente dado. La clave aquí es entender que el ambiente no está fijo y, en la medida que se vuelva más hostil, puede suceder que su adaptabilidad decrezca, pero sea evolutivamente más estable (i.e., lo que importa es el beneficio en el largo plazo).

Ahora, consideremos la siguiente generalización. Una población grande de agentes interaccionan paralelamente en juegos estratégicos bilaterales y simétricos. Sea $S = \{s_1, ..., s_1\}$ el conjunto de estrategias, y A la matriz de pagos. Esta es una matriz $n \times n$. Intepretamos cada elemento a_{ij} como el pago que recibe (cada jugador) cuando usan las estrategias s_i, s_j. Permitimos que los jugadores usen estratégias mixtas. Si un jugador juega σ y el otro σ' el pago esparado para cada uno es:

$$\sigma A \sigma'$$

Una interpretación posible es que σ puede ser la estrategia que exante usa toda la población y expost es la distribición de la población con la que se juega cada estrategia pura.

El concepto clave es entonces el que introdujeron Smith y Price (1973).

Definición 3.25. Una estrategia mixta σ es un equilibrio evolutivamente estable si dado un σ existe $\bar{\epsilon} > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \bar{\epsilon}$:

$$\sigma A((1-\epsilon)\sigma + \epsilon\sigma') > \sigma' A((1-\epsilon)\sigma + \epsilon\sigma')$$

La interpretación es la siguiente. Una población grande y homogénea que utiliza una estrategia σ es un EEE si para cualquier otra estrategia σ' que pueda utilizar una subpoblación (mutante) existe un umbral $\bar{\epsilon}$ de tamaño de la subpoblación, tal que si esta es menor que ese umbral, el pago esperado que *cada agente* espera es estrictamente mayor a usar $\sigma' \neq \sigma$ cuando la población esperada expost es $(1-\epsilon)\sigma + \epsilon\sigma')$.

Obsérvese que la noción de equilibrio está basada fuertemente en la hipótesis de simetría exante de la población (i.e., población monomórfica).

Una de las cosas interesantes del concepto de EEE es que este no está basado en una forma de racionalidad como los conceptos de eliminación de estrategias dominadas o Nash. Sin embargo, sí captura alguna forma de racionalidad de los agentes: EES es un equilibrio perfecto simétrico del juego bilateral. En particular es un equilibrio de Nash. Demostramos esto último en la siguiente proposición.

Teorema 3.26. Si σ es un Equilibrio Evolucionario Estable entonces (σ, σ) es un EN simétrico del juego bilateral.

Ejercicio 3.27. Probar el anterior teorema.

3.6. Juegos generalizados y con un continuo de jugadores

En este sección exploraremos conceptos más avanzados en comparación con el resto del libro y supondremos conocimientos básicos de teoría de la medida. Esta sección no es necesaria para comprender el resto del libro, y está bien si es omitida por lectores que no están familiarizados con teoría de la medida. Este teoría será utilizada únicamente en una aplicación que haremos más adelante a la teoría del equilibrio general. El modelo que se va a introducir está basado en Riascos, A. y Torres Martinez, J.P (2012): *On the existence of pure strategy equilibria in large generalized games with atomic players.*

Consideramos dos generalizaciones importantes de la teoría de juegos estratégicos en forma normal. De una parte permitimos que el espacio de acciones de cada jugador dependa de las acciones de los demás (juego generalizado) y de otra parte permitimos que además de un número finito de jugadores (llamados atómicos) exista un continuo de jugadores (jugadores no-atómicos). Sin embargo, las acciones del continuo de jugadores solo tienen influencia sobre los pagos de los demás (atómicos y no-atómicos) a través de un mensaje que agrega las acciones de los jugadores no-atómicos.[4]

Sea $G = (T, (K_t, \Gamma_t, u_t)_{t \in T}, h)$ un juego generalizado con un número infinito de jugadores $T = T_1 \cup T_2$, donde $T_1 \subset \mathbb{R}$ es un conjunto compacto de medida finita de jugadores no atómicos con respecto a la medida de Lebesgue λ, y T_2 es un conjunto finito de jugadores.[5] Cada jugador $t \in T_1$ tiene un conjunto compacto no vacio de acciones $K_t \subset \widehat{K}$, donde $\widehat{K} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto y $\bigcap_{t \in T_1} K_t \neq \emptyset$. De otra parte cada jugador $t \in T_2$ tiene un conjunto compacto, no vacío de acciones $K_t \subset \mathbb{R}^{n_t}$, con $n_t \in \mathbb{N}$.

Un estrategia conjunta para los jugadores en T_1 está dada por una función $f : T_1 \to \widehat{K}$ tal que $f(t) \in K_t$, para todo $t \in T_1$. Como T_2 es finito, una estrategia conjunta para los jugadores en T_2 es un vector $a := (a_i; i \in T_2) \in$

[4]Cada una de las generalizaciones se podría presentar de forma independiente y adaptar la misma prueba para cada caso.

[5]En otras palabras, $(T_1, \mathbb{B}(T_1), \lambda)$ es un espacio de medida, donde $\mathbb{B}(T_1)$ es la $\sigma-$ algebra de conjuntos de Borel de T_1.

$\Pi_{t\in T_2}\mathbb{R}^{n_t}$ tal que $a_t \in K_t$, para todo $t \in T_2$. Sea $\mathcal{F}(T_i)$ el espacio de todas las estrategias conjuntas de los jugadores T_i, con $i \in \{1,2\}$. Dado $t \in T_2$, sea $\mathcal{F}_{-t}(T_2)$ el conjunto de acciones $a_{-t} := (a_j; j \in T_2 \setminus \{t\})$ que toman los demás jugadores $j \in T_2 \setminus \{t\}$.

En el juego $G = (T, (K_t, \Gamma_t, u_t)_{t\in T}, h)$ los jugadores no necesariamente incorporan las acciones de los otros jugadores en T_1. En otras palabras, los jugadores no necesariamente toman en cuenta las acciones de los otros jugadores no-atómicos para determinar su estrategia óptima. Sin embargo, cuando los jugadores toman su decisión, estos consideran información agregada de las acciones de los jugadores. Formalmente, dado un perfil de acciones de jugadores no-atómicos $f \in \mathcal{F}(T_1)$, el agente $t \in T_1$ toma en cuenta las acciones de los jugadores no-atómicos solo por medio del mensaje dado por la función $h : T_1 \times \widehat{K} \to \mathbb{R}^l$. En otras palabras, cada jugador t va a tener en cuenta la información agregada mediante el mensaje dado por la función $m(f) = \int\limits_{T_1} h(t, f(t))d\lambda$ para incorporar a sus estrategias.

Ahora nos vamos a concentrar en los perfiles de acciones para los cuales los mensajes están bien definidos. Decimos que f es un *perfil de estrategias* de los jugadores en T_1 si tanto $f \in \mathcal{F}(T_1)$ como $h(\cdot, f(\cdot))$ es una función medible desde T_1 hasta $\mathbb{R}^l$.[6] Sobre el comportamiento de los jugadores atómicos no son necesarias restricciones de medibilidad. Por esta razón, el conjunto de estrategias de los jugadores en T_2 es idéntico al espacio de perfiles de acciones $\mathcal{F}(T_2)$.

El conjunto de mensajes asociados con el perfil de estrategias de jugadores no-atómicos está dado por

$$M = \left\{ \int\limits_{T_1} h(t, f(t))d\lambda : \quad f \in \mathcal{F}(T_1) \ \wedge \ h(\cdot, f(\cdot))\,\text{es medible} \right\} \subset \mathbb{R}^l, \quad (3.1)$$

que es no vacío dado que $\bigcap_{t\in T_1} K_t$ es un conjunto no-vacío y h es una función continua. También, dado que los conjuntos $\widehat{K}$ y T_1 son compactos, para cualquier perfil de acciones $f : T_1 \to \widehat{K}$, la función $h(\cdot, f(\cdot)) : T_1 \to \mathbb{R}^l$ es acotada, de manera que si esta es medible entonces también es integrable. Por estas razones, en la definición del conjunto de mensajes M solo se requería que $h(\cdot, f(\cdot))$ fuera medible.

[6] En Schmeidler (1973) y Rath (1992), los jugadores son no-atómicos y toman en cuenta solamente el promedio de las acciones escogidas por los otros jugadores. Entonces, siguiendo nuestra notación, $l = n$ y $h(t, x) = x$. Por lo tanto, ellos definen los perfiles de estrategias como funciones medibles desde el conjunto de jugadores hasta el conjunto de acciones.

En nuestro juego, los mensajes acerca de los perfiles de estrategias de los jugadores en T_1 junto con los perfiles de estrategias de los jugadores en T_2 pueden restringir el conjunto de estrategias admisibles disponibles para un jugador $t \in T$. Esto es, dado un vector $(m, a) \in M \times \mathcal{F}(T_2)$ las estrategias disponibles para un jugador $t \in T_1$ están dadas por un conjunto $\Gamma_t(m, a) \subset K_t$, donde $\Gamma_t : M \times \mathcal{F}(T_2) \twoheadrightarrow K_t$ es una correspondencia continua con valores no vacíos y compactos. De forma análoga, dado $(m, a_{-t}) \in M \times \mathcal{F}_{-t}(T_2)$, el conjunto de estrategias para el jugador $t \in T_2$ es $\Gamma_t(m, a_{-t}) \subset K_t$, donde $\Gamma_t : M \times \mathcal{F}_{-t}(T_2) \twoheadrightarrow K_t$ es un correspondencia continua con valores no-vacíos, compactos y convexos. Nos referimos a las correspondencias $(\Gamma_t; t \in T)$ como correspondencias de estrategias admisibles.

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^k$, definimos $\mathcal{U}(A)$ como una colección de funciones continuas $u : A \to \mathbb{R}$. Supongamos que $\mathcal{U}(A)$ esta dotada con la topología de la norma del supremo. Suponemos que cada jugador $t \in T_1$tiene una función objetivo $u_t \in \mathcal{U}(\widehat{K} \times M \times \mathcal{F}(T_2))$ y que cada jugador $t \in T_2$ tiene una función objetivo $u_t \in \mathcal{U}(M \times \mathcal{F}(T_2))$ que se supone son cuasicóncavas en las estrategias. Finalmente, suponemos que la correspondencia $U : T_1 \to \mathcal{U}(\widehat{K} \times M \times \ \mathcal{F}(T_2))$ definida por $U(t) = u_t$ es medible.[7]

Definición 3.28. Un equilibrio de estrategias puras de Nash de un juego generalizado $G = (T, (K_t, \Gamma_t, u_t)_{t \in T}, h)$ está dado por los perfiles de estrategias $(f^*, (a_t^*; t \in T_2))$ tales que, para cualquier jugador no-atómico $t \in T_1$,

$$u_t(f^*(t), m(f^*), a^*) \geq u_t(f(t), m(f^*), a^*), \quad \forall f(t) \in \Gamma_t(m^*, a^*), \tag{3.2}$$

y para cualquier jugador atómico $t \in T_2$, $u_t(m(f^*), a^*) \geq u_t(m(f^*), a_t, a^*_{-t})$, $\forall a_t \in \Gamma_t(m^*, a^*_{-t})$, donde el mensaje $m(f^*) := \int_{T_1} h(t, f^*(t)) d\lambda$ pertenece al conjunto M.

En nuestra definición de equilibrio de Nash, cada agente maximiza su función objetivo, mientras que en Balder (1999) y Rath (1992), en el equilibrio, casi todos maximizan su función objetivo. Sin embargo, teniendo en cuenta que las funciones objetivo son continuas y los espacios de acciones compactos, dado un equilibrio para cualquiera de los juegos estudiados en estos artículos, siempre es posible cambiar las asignaciones asociadas con el conjunto de los

[7]Supongamos que hay un número finito de tipos en el conjunto de agentes no-atómicos, T_1. Esto es, hay una partición finita de T_1 en conjuntos Lebesgue-Medibles $\{I_1, \ldots, I_r\}$ tal que dos jugadores t y t' pertenecientes al mismo elemento de la partición son idénticos. En este caso, la restricción acerca de la medibilidad de U se satisface de forma trivial.

jugadores no-atómicos que no maximizan, dándoles a cada uno de ellos una estrategia óptima, sin cambiar la integrabilidad de los perfiles de acciones o el valor de los mensajes. De este modo, el Teorema 2 en Rath (1992) y el Teorema 2.1 de Balder (1999) aseguran la existencia del equilibrio de Nash donde todos los jugadores maximizan su función objetivo.

Teorema 3.29. Considere un juego generalizado $G = (T, (K_t, \Gamma_t, u_t)_{t\in T}, h)$ donde,

1. *El conjunto de los jugadores es* $T_1 \cup T_2$*, donde* T_1 *es un conjunto compacto de medida finita de jugadores no-atómicos, y* T_2 *es un conjunto finito de jugadores atómicos.*

2. *Para cualquier* $t \in T$*, los espacios de acciones* K_t *son no-vacíos y compactos, las correspondencias de estrategias admisibles* Γ_t *son continuas y tienen valores no-vacíos y compactos, y las funciones objetivo* u_t *son continuas.*

3. *Cada jugador atómico tiene un conjunto convexo de acciones, una correspondencia con valores convexos de estrategias admisibles, y una función objetivo cuasi-cóncava en su propia estrategia.*

4. *Existe un conjunto compacto* $\widehat{K}$ *tal que, para cualquier* $t \in T_1$*,* $K_t \subset \widehat{K}$ *y* $\bigcap\limits_{t\in T_1} K_t$ *este es no vacio.*

5. *La función* $h : T_1 \times \widehat{K} \to R^l$ *es continua.*

6. *La correspondencia* $U : T_1 \to U(\widehat{K} \times M \times \ F(T_2))$*, que asocia con cualquier* $t \in T_1$ *la función objetivo* u_t*, es medible.*

Entonces, existe un equilibrio de estrategias puras de Nash.

Capítulo 4

Aplicaciones juegos estáticos

El propósito de este capítulo es presentar algunas aplicaciones de la teoría de juegos introducida hasta este punto. Estas son: la teoría de competencia imperfecta entre firmas (monopolio y oligopolio), la provisión de bienes públicos, el problema de implementación o diseño institucional, la teoría de redes y el problema de existencia del equilibrio walrasiano en una economía de intercambio con infinitos agentes.

4.1. Oligopolio

Supongamos que hay n firmas que producen un único bien homogéneo. Las firmas son heterogéneas en costos y no tienen restricciones de capacidad. Vamos a denotar con $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la demanda agregada y supondremos que esta satisface la ley de la demanda. La función de demanda inversa la denotamos por $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Adicionalmente, suponemos que cada firma tiene una función de costos creciente $C_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

4.1.1. Cournot

Para modelar el problema de oligopolio según Cournot, vamos a definir el conjunto de estrategias de cada firma como los niveles de producción q_i. El pago neto es $\Pi_i(q_i, q_{-i}) = P(Q)q_i - C_i(q_i)$, donde Q es la oferta total que, en equilibrio, se agota completamente en el mercado.

En un equilibrio de Nash (interior) $(q_1^*, ..., q_n^*)$, donde q_i es la oferta de la firma i, se cumple:

$$C_i'(q_i^*) - P(Q^*) = P'(Q^*)q_i^*$$

donde $Q^* = \sum_{i=1}^{n} q_i$. Esto es es equivalente a:

$$\frac{P(Q^*) - C_i'(q_i^*)}{P(Q^*)} = \frac{-P'(Q^*)}{P(Q^*)} q_i^* = \frac{-1}{\varepsilon(P(Q^*))} \frac{q_i^*}{Q^*}$$

donde ε denota la elasticidad de la demanda agregada.

Obsérvese que competencia perfecta es un caso particular de competencia a la Cournot donde la demanda agregada es perfectamente elástica ($\varepsilon(P(Q^*))$ es infinito). Notemos entonces que la diferencia entre costo marginal y el precio de equilibrio depende de:

1. La elasticidad de la demanda con respecto al precio (entre más inelástica mayor la diferencia).

2. La participación de mercado $\frac{q_i^*}{Q^*}$ de la firma.

Las consideraciones anteriores las podemos resumir en la siguiente relación. Sea $\alpha_i^* = \frac{q_i^*}{Q^*}$ la participación del mercado de cada firma y definamos el índice de Lerner L como:

$$L(q^*) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* \frac{P(Q^*) - C_i'(q_i^*)}{P(Q^*)}.$$

Esta es una medida ponderada de las desviaciones de competencia perfecta.

Definimos el índice de Herfindhal H como:

$$H(\alpha^*) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{*2}$$

y la elasticidad de la demanda agregada inversa como λ como:

$$\lambda(Q) = -P'(Q)\frac{Q}{P}.$$

Ejercicio 4.1. Demuestre que $\lambda(Q) = \frac{1}{\varepsilon(P(Q))}$.

Entonces es fácil demostrar que:

$$L(q^*) = \lambda(Q^*)H(\alpha^*)$$

Obsérvese que $H(\alpha^*)$ es un índice de concentración de mercado (su máximo se alcanza cuando para algún i, $\alpha_i^* = 1$). En conclusión, entre más inelástica sea la función de demanda (o más elástica sea la función de demanda inversa) y exista mayor concentración de mercado, mayor es la desviación del equilibrio competitivo. El resultado anterior se obtuvo bajo la hipótesis de homogeneidad del bien producido, más no de las firmas que lo producen.

Ejercicio 4.2. Demuestre que el índice $H(\alpha^*)$ alcanza su valor máximo cuando para un i, $\alpha_i^* = 1$.

En el caso de un duopolio, si adicionalmente suponemos que las firmas son homogéneas, costos marginales constantes y demanda agregada lineal, el equilibrio de Nash es una predicción muy bien fundada pues es el único resultado de la eliminación iterativa de estrategias dominadas, luego es un equilibrio de Nash y, además, es único. Es decir, un duopolio á la Cournot es un juego solucionable en estrategias que sobreviven la eliminación iterativa de estrategias dominadas. [1]

Ejemplo 4.3. Supongamos que J firmas idénticas compiten en un mercado por un bien homogéneo. Vamos a suponer que sus costos marginales son constantes:

$$C(q^j) = cq^j \tag{4.1}$$

donde $c \geq 0$ y q^j es el nivel de producción de la firma j.

Supongamos que la demanda agregada inversa es lineal y la podemos escribir como:

$$p = a - b\sum_{j=1}^{J} q^j \tag{4.2}$$

donde a y b son positivos. Por lo tanto, los beneficios de una firma j son:

$$\Pi^j(q^1, ...q^J) = \left(a - b\sum_{j=1}^{J} q^j\right) q^j - cq^j. \tag{4.3}$$

Maximizando el beneficio de la firma j respecto a q^j, obtenemos que el equilibrio de Nash (Cournot - Nash) de este juego es:

$$q^j = q = \frac{a-c}{b(J+1)}. \tag{4.4}$$

[1] Véase Vega-Redondo, F. (2003). Economics and the Theory of Games. Páginas 76-78

Esto implica que los valores de equilibrio de la demanda (oferta) agregada, precio y beneficios son respectivamente:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{J} q^j &= \frac{J\,(a-c)}{b(J+1)} \\
c &< p = a - J\frac{a-c}{(J+1)} < a \\
\Pi^j &= \frac{(a-c)^2}{b(J+1)^2}
\end{aligned}$$

Vale la pena resaltar que cuando $J = 1$ tenemos el caso de una firma monopolista y cuando $J \to \infty$ obtenemos competencia perfecta.

Ejercicio 4.4. Competencia imperfecta, costos de entrada y el número de firmas en la industria[2]. Supongamos que J firmas idénticas compiten en un mercado por un bien homogéneo.

Vamos a suponer que los costos de las firmas son:

$$c(q^j) = cq^j + F \tag{4.5}$$

donde $c \geq 0$ y q^j es el nivel de producción de la firma j y F es un costo fijo.

Supongamos que la demanda agregada inversa es lineal y la podemos escribir como:

$$p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J} q^j \tag{4.6}$$

Por lo tanto, los beneficios de una firma j son:

$$\Pi^j(q^1, ...q^J) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J} q^j\right) q^j - cq^j - F. \tag{4.7}$$

1. Calcule el equilibrio (simétrico) de Nash en competencia a la Cournot.

2. Calcule los beneficios individuales en equilibrio de cada firma y los beneficios agregados.

3. Muestre que la agregación de los beneficios de las firmas disminuye con el número de firmas.

[2]Tomado de Motta, M. (2004). Competition Theory and Policy. Page 54

4. ¿Cuál es su interpretación de este fenómeno?

Ejercicio 4.5. Competencia por la extracción de rentas de un mercado.[3] Considere n firmas idénticas que compiten por obtener el derecho a explotar como un monopolio un mercado específico. Cada firma decide de forma simultánea su gasto x_i para ganarse el derecho. La probabilidad de ganarse el derecho es $\frac{x_i}{\sum_{j=1,\dots n} x_j}$. Sea Π (i.e., esta es una constante y su valor no importa para los fines del ejercicio) las rentas monopolístas en caso de obtener el derecho a explotar el mercado. Entonces el pago esperado π_i de la firma i es:

$$\pi_i = \frac{x_i}{\sum_{j=1,\dots n} x_j}\Pi - x_i$$

1. Encuentre el equilibrio de Nash simétrico (i.e., las acciones de cada firma son elegir x_i).

2. Calcule el beneficio esperado de cada firma en equilibrio.

3. Muestre que cuando n tiende a infinito el gasto agregado hecho por todas las empresas es igual al beneficio del monopolista Π.

4.1.2. Aplicación al sector eléctrico colombiano

La liberalización del sector eléctrico Colombiano ha tenido como uno de sus principales propósitos promover la eficiencia de la prestación de un servicio esencial para la sociedad de forma confiable y con calidad. Desde un punto de vista económico, en mercados descentralizados la prescripción normativa para ser eficientes es promover la competencia (i.e., mitigar el poder de mercado). El problema es cómo garantizar una operación eficiente en un mercado con la características propias del mercado eléctrico: demanda inelástica, concentración de mercado, altos costos de almacenamiento, etc.

Una forma de racionalizar las dificultades que estas características del mercado imponen al propósito de producir de forma eficiente es utilizando el modelo de Cournot. En un mercado con pocas firmas que producen un bien homogéneo y sin restricciones de capacidad, en competencia a la Cournot, el

[3]Tomado de Motta, M. (2004). Competition Theory and Policy. Página 89.

equilibrio de Nash - Cournot satisface:

$$Markup \equiv \frac{P - CM_i}{P} = -\frac{1}{\epsilon}\frac{Q_i}{Q}$$

donde CM_i es el costo marginal del recurso de generación i, P es el precio de venta (i.e., precio de bolsa), ϵ es la elasticidad de la demanda agregada del mercado, Q_i es la disponibilidad declarada del recurso i y Q la demanda agregada. Como puede observarse de esta ecuación, entre menor es la elasticidad de la demanda o mayor es la participación de una firma en el mercado, mayor es el markup (el precio de venta de la energía por encima de sus costos marginales). Las implicaciones de no poder almacenar la energía de forma eficiente también pueden intuirse de esta ecuación. En equilibrio, Q es igual a la oferta agregada y, por lo tanto, ante una restricción de la oferta (voluntaria o no) o bien la demanda tiene que ajustarse, aumentando el poder de mercado de algunos recursos, o la energía almacenada se utiliza para suplir la deficiencia en la oferta. Dado que este segundo escenario es muy costoso, la consecuencia de no poder almacenar la energía implica que algunos agentes tienen mayor poder de mercado.[4]

Ahora, en el sector eléctrico no es fácil observar los costos marginales de los recursos generadores. Luego, una forma de estimar el poder de mercado es estudiando las participaciones de los participantes y las elasticidades. En esta sección vamos a profundizar y enriquecer el cálculo de las participaciones con el fin de entender mejor el poder de mercado en el sector eléctrico.

Para esto vamos a introducir el Índice de Oferta Residual (IOR):

$$IOR_i = \frac{\sum_j Q_j - Q_i}{Q}$$

Q_k es la oferta (declarada) del recurso k y Q es la demanda. Vamos a utilizar el IOR por firma por hora.

Ahora, la teoría económica sugiere que el IOR es un reflejo del poder de mercado. Volviendo al modelo de Cournot, no es difícil ver que en equilibrio el IOR_i esta relacionado con el *Markup* de acuerdo a la siguiente relación:

$$Markup \equiv \frac{P - CM_i}{P} = -\frac{1}{\epsilon}\left(1 + \frac{1}{Q}\sum_{j \text{ recurso no despachado}} Q_j - IOR_i\right)$$

[4]En sistemas con un componente importante de energía hídrica, los embalses pueden considerarse una forma de almacenamiento. Sin embargo, en situaciones criticas de escasez de agua su capacidad de mitigar este riesgo de ejercer poder de mercado es menor.

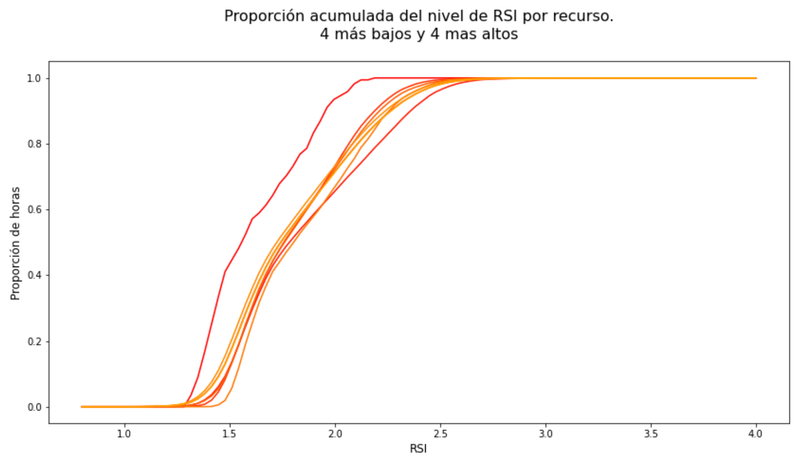


Figura 4.1: IOR por recurso. Fuente: XM. Cálculos del autor.

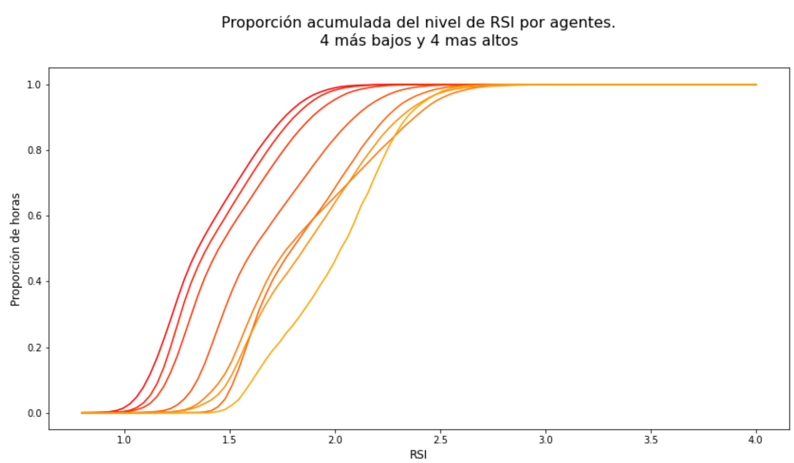


Figura 4.2: IOR por agentes. Fuente: XM. Cálculos del autor.

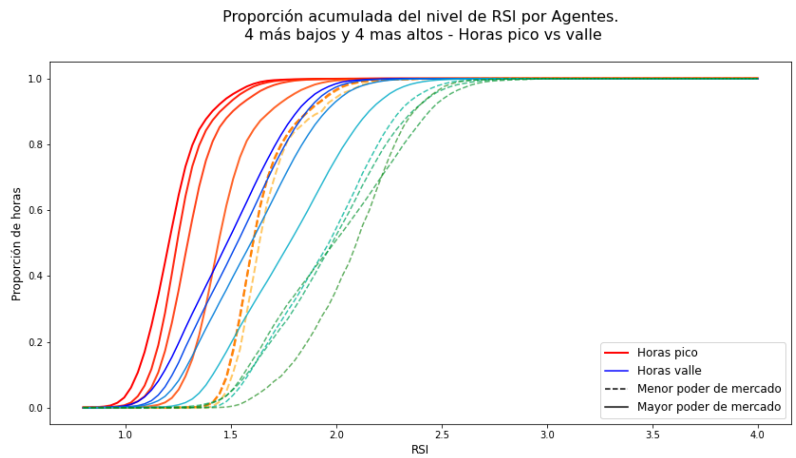


Figura 4.3: *IOR* por agentes horas pico vs. valle. Fuente: XM. Cálculos del autor.

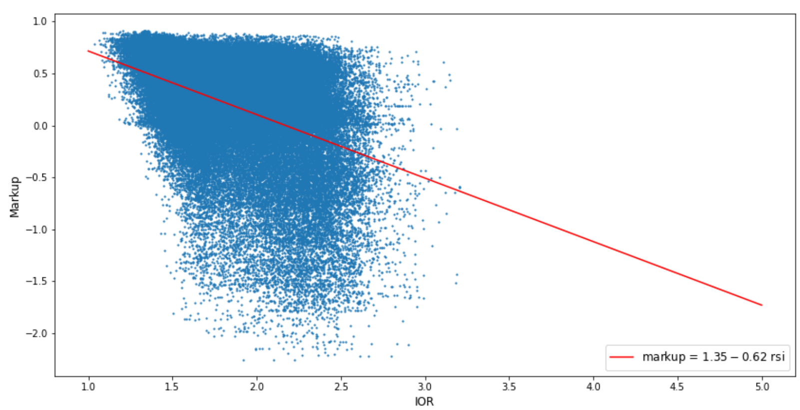


Figura 4.4: Relación entre el *markup* y el *IOR*. Fuente: XM. Cálculos del autor.

Las siguientes gráficas validan la utilización del IOR como una aproximación a los markups.

Alternativamente, podemos interpretar la anterior gráfica como sigue. Más energía contratada implica menos poder de mercado (i.e., menor disponibilidad, menos poder de mercado mayor el IOR).

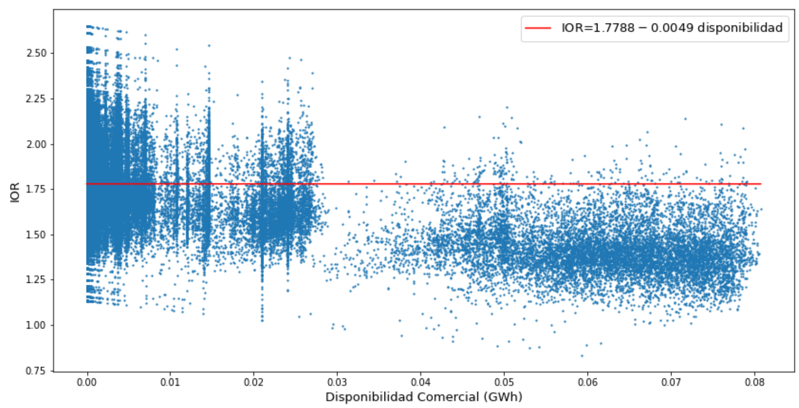


Figura 4.5: Relación entre el IOR y disponibilidad comercial. Fuente: XM. Cálculos del autor.

4.1.3. Bertrand: Bienes homogéneos

En el modelo de oligopolio de Bertrand consideramos el caso en el que el bien es homogéneo y las firmas son simétricas. En particular, vamos a suponer que las firmas tienen costos marginales constantes e iguales entre ellas.

En el contexto del modelo anterior, si las firmas compiten en precios entonces el equilibrio coincide con el equilibrio en competencia perfecta y todas las firmas tienen beneficios cero. En caso de empate las firmas se reparten el mercado en la misma proporción. Para ver esto, primero obsérvese que si el menor precio ofertado es inferior al costo marginal este no puede ser un equilibrio de Nash. Ahora, suponga que el menor precio ofertado es estrictamente superior al costo marginal (y la función de demanda agregada es continua). Es fácil ver que existe por lo menos una firma que no está atendiendo toda la demanda: o bien es una firma que no está ofreciendo el menor precio o bien es una firma que está ofreciendo el menor precio pero debe compartir el mercado con otra que también ha ofrecido el menor precio.

Es claro que esta firma (que no atiende todo el mercado) tiene incentivos a desviarse (una reducción suficientemente pequeña del precio mínimo ofertado por todas las firmas resulta en un aumento de su beneficio). Luego, el precio de equilibrio debe ser igual al costo marginal. Finalmente, no es difícil verificar que si por lo menos una firma oferta el costo marginal entonces este es un equilibrio de Nash.

Ejercicio 4.6. Demuestre que en el modelo anterior de competencia a la Bertrand existen infinitos equilibrios de Nash y un solo equilibrio de Nash simétrico.

4.1.4. Bertrand: Bienes no homogéneos

Ahora relajemos únicamente el supuesto de bienes homogéneos. Supongamos que tenemos dos firmas simétricas que producen dos bienes diferenciados pero con los mismos costos marginales de producción. Una forma común de clasificar las diferentes formas de diferenciación de los bienes es clasificarlas en diferenciación horizontal o vertical. Decimos que hay diferenciación horizontal cuando en cada par de bienes distintos si tuvieran el mismo precio se demandarían ambos fruto de la heterogeneidad de las preferencias de los consumidores. Esto suele suceder cuando lo bienes son complementarios o tienen características observables distintas que los hacen claramente diferentes. Decimos que la diferenciación es vertical cuando bienes con el mismo precio solo se demanda uno de ellos. Esto suele suceder cuando algunas características no observables, como la calidad del bien, o durabilidad del mismo, son distintas y los consumidores están de acuerdo sobre esto. En esta sección vamos a considerar bienes diferenciados horizontalmente.

Las funciones de costos son:

$$C_i(q_i) = cq_i$$

La función inversa de demanda de cada producto es de la forma:

$$P_i\left(q_1, q_2\right) = \text{máx}\{0, M - q_i - bq_j\},\ i, j = 1, 2\ i \neq j$$

lo cual refleja que los productos son percibidos como distintos por los consumidores y las demandas no son independientes.

Las funciones de demanda son:

$$D_i\left(p_1, p_2\right) = \text{máx}\{0, \frac{M}{1+b} - \frac{1}{1-b^2}p_i + \frac{b}{1-b^2}p_j\}$$

El parámetro b refleja el grado de sustitución entre los dos bienes. El pago neto de cada jugador es:

$$\pi_i\left(p_1, p_2\right) = (p_i - c)\,\text{máx}\{0, \frac{M}{1+b} - \frac{1}{1-b^2}p_i + \frac{b}{1-b^2}p_j\}$$

Es fácil demostrar que el equilibrio (interior) simétrico es:

$$p_1^* = p_2^* = \frac{M(1-b)}{2-b} + \frac{c}{2-b}.$$

Cuando $b \uparrow 1$ los bienes son menos heterogéneos y el resultado tiende a los precios de competencia perfecta. [5]

4.1.5. Bertrand: Restricciones de capacidad

En esta sección estudiamos los efectos de cierto tipo de mecanismos de sesiones y compensaciones en un mercado de commodities. Este es un modelo simplificado del mercado del azúcar o el aceite de palma en Colombia. Supongamos que n productores venden un producto homogéneo, que los costos de producción son cero y que existen dos mercados para el producto: un mercado interno y un mercado externo. En ambos la demanda es inelástica. Sea D la demanda interna por el bien. Supondremos que la demanda externa es residual, es decir, que todo lo que no se venda internamente se vende en el mercado externo a un precio p^E. Sea p_i^M el precio de venta que fija el productor i en el mercado interno. Definimos $\theta(p^M) = \text{mín}\{p_1^M, ...p_n^M\}$.

La capacidad de producción de las firmas la denotamos por Q_i y su producción destinada a atender el mercado interno la denotamos por $q_i(p^M)$. Sea $x = \frac{D}{\sum_{i=1}^n Q_i}$ la proporción de la capacidad de producción total que representa la demanda interna y $x_i(p^M) = \frac{q_i(p^M)}{Q_i}$ la proporción de la producción total de la firma i que se vende en el mercado interno.

Vamos a suponer que:

1. La oferta es mayor que la demanda interna: $\sum_{i=1}^n Q_i > D$.
2. Ninguna firma es capaz de suplir la totalidad de la demanda interna (i.e., existen restricciones de capacidad).
3. Las firmas que fijan el menor precio participan en el mercado proporcionalmente a su producción.

Con estas hipótesis los beneficios de la firmas son:

[5] Otro caso interesante para estudiar es cuando existen restricciones de capacidad.

$$\pi_i = p^E \times Q_i, \ si \ p_i^M > \theta(p^M) \quad (4.8)$$
$$\pi_i = \theta(p^M) \times x_i(p^M)Q_i + p^E \times (1 - x_i(p^M))Q_i, \ si \ p_i^M = \theta(p^M) \quad (4.9)$$

Obsérvese que los beneficios de las firmas se pueden reescribir como:

$$\pi_i = p^E \times Q_i, \ si \ p_i^M > \theta(p^M) \quad (4.10)$$
$$\pi_i = (\theta(p^M) - p^E) \times x_i(p^M)Q_i + p^E \times Q_i, \ si \ p_i^M = \theta(p^M) \quad (4.11)$$

Ejercicio 4.7. Demuestre que el equilibrio de Bertrand en este caso es $\theta(p^M) = p^E$ (recuerde que la oferta es mayor que la demanda interna).

Suponga que existe la posibilidad de importar el bien a un precio $p^I > p^E$ (debido a aranceles que buscan proteger el sector). Es claro que, debido a que la oferta es mayor a la demanda interna, los aranceles no tiene ningún efecto sobre el equilibrio. Este sigue siendo $\theta(p^M) = p^E$.

Suponga entonces que los productores crean un mecanismo de sesiones y compensaciones que, utilizando las cantidades vendidas por cada productor (reportadas por estos y debidamente auditadas) y los precios de exportación e importación (públicamente disponibles), hace las siguientes transferencias a cada productor:

$$(p^I - p^E) \times xQ_i, \ si \ p_i^M > \theta(p^M) \quad (4.12)$$
$$(p^I - p^E) \times (x - x_i(p^M))Q_i, \ si \ p_i^M = \theta(p^M) \quad (4.13)$$

Después de recibir las transferencias los beneficios de las empresas son,

$$\overline{p}Q_i, \ si \ p_i^M > \theta(p^M) \quad (4.14)$$
$$(\theta(p^M) - p^I) \times x_i(p^M)Q_i + \overline{p}Q_i, \ si \ p_i^M = \theta(p^M) \quad (4.15)$$

donde $\overline{p} = p^I \frac{D}{Q} + p^E \times (1 - \frac{D}{Q})$ y Q es la capacidad total de producción de las firmas.

Vamos a demostrar que si $\theta(p^M) = p^I$ entonces este es un equilibrio de Nash. Además, los beneficios de equilibrio son $\overline{p}Q_i$ para todas las firmas (vendan o no internamente).

Para ver esto, primero suponga que $\theta(p^M) < p^I$. En este caso las firmas con el menor precio ganan menos que $\overline{p}Q_i$. Una de estas firmas subiendo el precio lograría un beneficio igual a $\overline{p}Q_i$. Suponga en cambio que $\theta(p^M) > p^I$. Como la oferta es superior a la demanda interna, entonces por lo menos una firma no está vendiendo la totalidad de su producción en el mercado interno (i.e., $x_i < 1$). Tome una de estas firmas y cambie el precio p_i^M por $\theta(p^M) - \epsilon$ donde ϵ es suficientemente pequeño. Entonces su beneficio sería $(\theta(p^M) - p^I - \epsilon)Q_i + \overline{p}Q_i$. Si no cambiara su precio, su beneficio sería $\overline{p}Q_i$ o $(\theta(p^M) - p^I) \times x_iQ_i + \overline{p}Q_i$. Por tanto, si ϵ es lo suficientemente pequeño, y teniendo en cuenta que $x_i < 1$, entonces:

$$\overline{p}Q_i \tag{4.16}$$
$$< (\theta(p^M) - p^I) \times x_iQ_i + \overline{p}Q_i \tag{4.17}$$
$$< (\theta(p^M) - p^I - \epsilon) \times Q_i + \overline{p}Q_i \tag{4.18}$$

Luego existirían incentivos unilaterales a desviarse.

En conclusión, $\theta(p^M) = p^I$ es un candidato a equilibrio. Para mostrar que en efecto es un equilibrio vamos a demostrar dos cosas. Que aquellos que empatan en el menor precio no tienen incentivos unilaterales a desviarse y que lo mismo sucede con aquellos que fijan un precio mayor al menor precio. Sea i tal que $p_i^M = \theta(p^M)$. Si i cambia su precio por $\theta(p^M) - \epsilon$ entonces su beneficio después del mecanismo de compensación es:

$$(\theta(p^M) - \epsilon) \times Q_i + (p^I - p^E)(x - 1) \tag{4.19}$$
$$= (\theta(p^M) - p^I - \epsilon + \overline{p}) \times Q_i \tag{4.20}$$
$$= (-\epsilon + \overline{p}) \times Q_i \tag{4.21}$$

porque $\theta(p^M) = p^I$. Pero obsérvese que este beneficio es menor que $\overline{p} \times Q_i$, que es el beneficio antes de intentar desviarse de forma unilateral.

Por último, considere un productor que fija precios superiores al precio $\theta(p^M) = p^I$ e intenta desviarse. Si este disminuye su precio hasta igualar el menor precio, sus beneficios no cambian. Y si lo disminuye por debajo del precio p^I sus beneficios disminuyen.

En resumen, el mecanismo de sesiones y compensaciones logra sostener un precio interno más alto que en ausencia del mecanismo y observacionalmente el resultado es como si las firmas actuaran como un monopolio.

Ejercicio 4.8. Planteé el mismo problema del ejemplo anterior y muestre que los resultados siguen siendo válidos aún cuando la demanda doméstica es elástica.

4.1.6. Resumen

A continuación resumimos algunas de las lecciones principales de los modelos de competencia oligopolística estudiados en la secciones anteriores.

Si las firmas producen un bien homogéneo en competencia oligopolística a la Cournot, la desviación de competencia perfecta depende de la elasticidad de la demanda agregada con respecto al precio (entre más inelástica, más poder de mercado) y el nivel de producción de la firma (entre mayor participación, mayor poder de mercado). Una medida de qué tan distante está el mercado de competencia perfecta es el índice de Lerner, el cual es un promedio ponderado de las desviaciones relativas del precio de equilibrio en competencia imperfecta del costo marginal (con respecto al precio de equilibrio) ponderado por la participación de mercado de cada firma. Este se puede expresar como el producto del índice de Herfindahl y la elasticidad de la demanda inversa.

Cuando las firmas producen un bien homogéneo y además sus costos marginales son constantes e iguales entre ellas, competencia a la Bertrand implica que el equilibrio de Nash simétrico coincide con competencia perfecta. Sin embargo, en presencia de restricciones de capacidad puede no existir un equilibrio.

Si los costos marginales no son iguales, con restricciones de capacidad puede no existir un equilibrio. Si las $n-1$ firmas más pequenñas, en términos de capacidad, no pueden atender la totalidad del mercado, no existe necesariamente un equilibrio.

Si los bienes producidos son diferenciados pero los costos marginales son constantes e iguales entre firmas, competencia a la Bertrand implica que el equilibrio se desvía de competencia perfecta. Entre más diferenciados los bienes (menor sustitución entre ellos) más distante es el equilibrio de competencia perfecta.

4.1.7. Modelo Básico de Elección Discreta

Para ilustrar algunas de las ideas mencionadas sobre los modelos estructurales, a continuación estudiamos un modelo de competencia a la Betrand con miras a resolver un problema de cuantificación del daño de una presunta práctica anticompetitiva.

Esta metodología se basa en Nevo (1998). Considere $i = 1, ..., N$ firmas en el mercado. Cada firma ofrece un conjunto F_j de productos diferenciados. Sea J el número total de productos que se ofrecen. La demanda del producto j viene dada por

$$Q_j = Q(p_1, ..., p_J, Z; \alpha), \quad j = 1, ..., J \tag{4.22}$$

donde Z es un vector de variables exógenas y α es un vector de parámetros que deben ser estimados.

Los beneficios de la firma i son:

$$\Pi_i = \sum_{j \in F_i} (p_j - mc(W_j, \beta))Q_j - C_i \tag{4.23}$$

donde $mc(W_j, \beta))$ es el costo marginal de producir el bien j, W_j es un vector de variables exógenas, β es un vector de parámetros que deben ser estimados, C_i es el costo fijo. Obsérvese que esta especificación implica que los costos marginales son constantes.

Las condiciones de primer orden (en forma matricial) son:

$$p = mc + \Omega^{-1}Q(p) \tag{4.24}$$

donde $\Omega \equiv \Theta \cdot \partial Q_r(p)/\partial p_j$ y Θ es una matriz de unos y ceros que obedece a varios tipos de competencia.

En particular Θ puede representar tres diferentes tipos de competencia:

1. Matriz identidad: Bertrand con firmas uni-producto.

2. Matriz con bloques de unos: Bertrand con firmas multi-producto.

3. Matriz de unos: Bertrand con firmas en colusión.

La especificación econométrica se completa añadiendo un término de error a la demanda y la ecuación de fijación de precios. Este modelo puede utilizarse para estimar qué tipo de competencia es más apropiada entre un menú de posibilidades. Formalmente esto se puede hacer como sugieren algunos artículos: Bresnahan (1987) y Gasami et.al (1992). También puede utilizarse para constuir escenarios contrafactuales: competencia perfecta, colusión, etc.

El modelo de variaciones conjeturales es idéntico pero excepto que la matriz Θ no se supone de ceros y unos sino parámetros generales (estos representan una medida de poder de mercado). Usualmente se interpretan como las conjeturas que las firmas tienen sobre el comportamiento de las demás. En el capitulo 12 se presenta una aplicación de este modelo en el contexto de juegos repetidos.

4.2. Modelos de Localización

Los modelos de localización son modelos de interacción estratégica entre individuos o empresas que son heterogéneos en diferentes grados y/o compiten por productos heterogéneos como productos diferenciados horizontalmente.[6] A continuación presentamos dos aplicaciones de este tipo de modelos: una aplicación estilizada al mercado de automóviles que ilustra un punto muy importante y que puede parecer contra intuitivo. Para ganar participación de un mercado de clientes segmentados, puede ser una mejor estrategia premiar a los clientes actuales con descuentos y aumentarle el precio a los que nos son clientes!

Por último, presentamos un modelo de localización un poco más complejo que permite estudiar el efecto de las tarifas de terminación de llamadas de un operador de celular a otro operador de celular.

4.2.1. Competencia por segmentos de mercado

Los modelos de localización son comúnes en situaciones en las cuales los productos presentan diferenciación horizontal, es decir no se puede encontrar una diferencia observable por todos los consumidores de manera que se pueda catalogar a un producto como mejor que otro. En este sentido la diferenciación horizontal implica que las diferencias entre productos son sutiles y que solo influyen en la demanda en función de las preferencias de los agentes. Para ejemplificar esto, piense en dos detergentes para el lavado de la ropa, imagine que ambos tienen las mismas características con excepción al olor, el primer detergente huele a limón y el segundo a fresas, cada lector podría escoger su favorito en función de sus preferencias por el olor, no obstante ¿se

[6] Los productos diferenciados horizontalmente son productos que aún con el mismo precio son demandados. En contraste, la diferenciación vertical de productos se refiere a la diferenciación en calidad. Existe consenso sobre cual es la calidad y el ordenamiento de los producto por calidad.

podría utilizar estas preferencias para maximizar los beneficios de una firma?

En la literatura económica se presentan diversos casos como lo son modelo de Hotteling o Harbord - Hoernig, que se describirán brevemente a continuación.

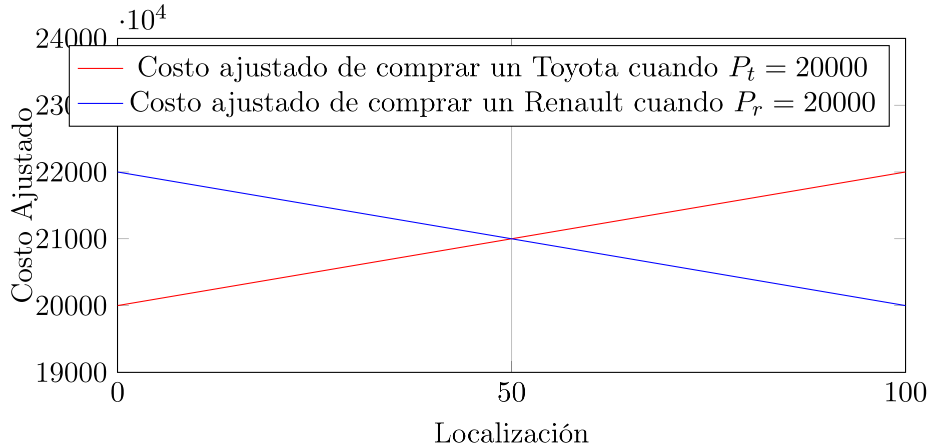
4.2.2. Hotteling: Ciudad Lineal - Oligopolio

El modelo de Hotteling o Ciudad Lineal, como su nombre lo indica este caso se contextualiza en una hipotética ciudad donde sus habitantes se encuentran distribuidos en una línea recta, existe un número N de individuos localizados a lo largo de la ciudad y además se asume que se distribuyen uniformemente a lo largo de la recta. Existe un único bien cuya utilidad es idéntica para cada individuo, este producto puede ser ofrecido por empresas que toman dos decisiones, la primera es ubicarse en la recta y en segundo lugar el precio al que ofrecerán el producto. En este modelo cada individuo puede adquirir solo un bien y cada empresa tiene capacidad para abarcar todo el mercado. Los consumidores pueden adquirir el bien al precio que establezca la firma a la que deseen comprar, sin embargo, deberán incurrir en un costo adicional por la distancia entre su ubicación y la ubicación de la firma, la suma entre el precio del producto y el costo por la distancia la llamaremos costo ajustado.

La ciudad lineal en la que se ubican tanto individuos como firmas representa una escala de preferencias ordenadas donde el costo en el que incurre el agente es la desutilidad producida de comprar un producto lejos de sus preferencias. En este sentido las firmas al momento de escoger su localización lo que realmente están realizando es una seleccionan de las características del producto que lo ubiquen en determinada posición en la escala de preferencias.

En esta sección se analizará el caso estático de un duopolio. Al ser un juego estático la localización se ha definido previamente y las firmas solo compiten por precio teniendo en cuenta el poder de mercado generado por la diferenciación producto de su ubicación. Sin pérdida de generalidad se tomará el caso de máxima diferenciación, es decir cada empresa se ubica en un extremo de la ciudad.

Para ejemplificar este modelo imagine dos autos uno marca Toyota y otro marca Renault, los autos tienen las mismas características y la única diferenciación se encuentra en la marca. Asuma que existe en una longitud de



100, la empresa Toyota se encuentra en 0 y la ubicación de Renault es 100. Existen 100 consumidores distribuidos equitativamente entre 0 y 100. Cada consumidor se encuentra en una localización X, el costo ajustado de adquirir una Toyota (C_t) o un Renault (C_r) serán

$$\begin{aligned} C_t &= P_t + bX \\ C_r &= P_r + b(100 - X) \end{aligned} \tag{4.25}$$

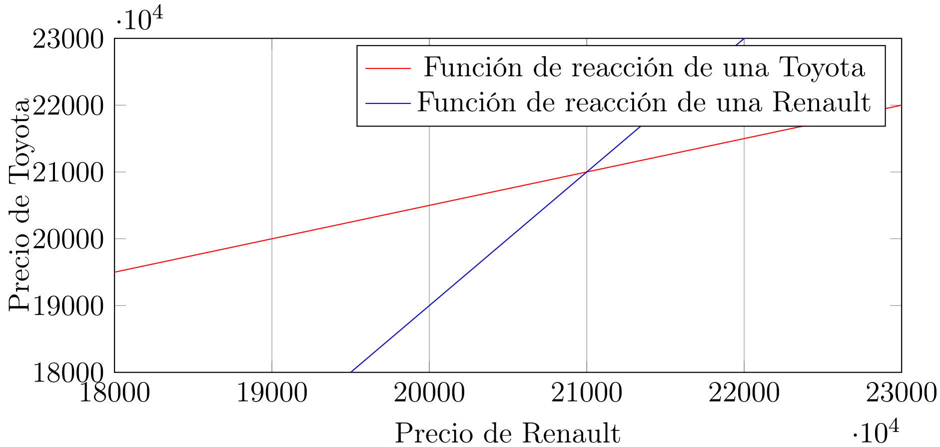
Entendiendo el parámetro b como cuanto costo adicional le genera al agente alejarse en una unidad en su escala de preferencias. Para nuestro ejemplo asumiremos $b = 20$ también tomemos que el costo marginal de producir un auto para ambas empresas es de $cmg = 19000$.

Por debajo de $X = 50$ Toyota tiene mayor poder de influencia sobre los consumidores ubicados en esa zona, esto debido a que por debajo de 50 ante un mismo precio entre Toyota y Renault los consumidores prefieren adquirir el auto en Toyota. En otras palabras, esta firma puede ofrecer un precio mayor al de Renault debido a que se siente más identificado en sus preferencias a los autos de Toyota en comparación con los Renault.

Toyota sabe que los consumidores compraran el auto más barato comparando sus costos ajustados según su localización, por lo tanto, los individuos compraran un auto marca Toyota siempre que:

$$\begin{aligned} P_r + 20(100 - X) &\geq P_t + 20X \\ 50 - \frac{P_t - P_r}{40} &\geq X \end{aligned} \tag{4.26}$$

Dado que los consumidores están idénticamente distribuidos a lo largo de la



recta, el número de agentes que compraran autos Toyota serán $50 - \frac{P_t - P_r}{40} = Q_t$, de esta forma se puede calcular el precio optimo dado la cantidad demandada y el precio de la competencia

$$\begin{aligned} 50 - \frac{P_t - P_r}{40} &= Q_t \\ 2000 - 40Q_t + P_r &= P_t \end{aligned} \tag{4.27}$$

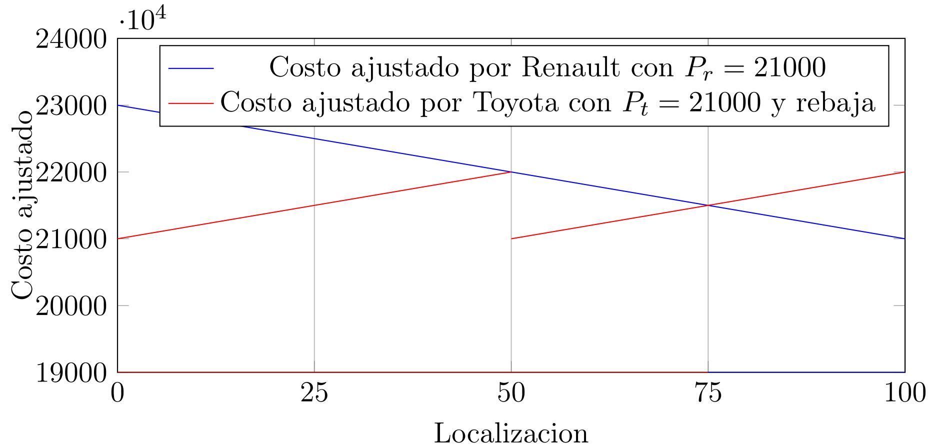
A partir de esta función inversa de demanda se encuentra el ingreso marginal: $img = 2000 - 80Q_t + P_r$, dado que conocemos el cmg, se puede encontrar las cantidades optimas

$$\begin{aligned} 2000 - 80Q_t + P_r &= 19000 \\ \frac{P_r - 17000}{80} &= Q_t \end{aligned} \tag{4.28}$$

Tomando esta función y reemplazando en la función inversa de demanda se encuentra la función de reacción de Toyota con respecto al precio de Renault

$$\begin{aligned} 2000 - \frac{P_r - 17000}{2} + P_r &= P_t \\ \frac{P_r}{2} + 10500 &= P_t \end{aligned} \tag{4.29}$$

Dado que el escenario planteado es simétrico para ambas firmas, se puede encontrar la función de reacción de Renault como $\frac{P_t}{2} + 10500 = P_r$, teniendo en cuenta estas dos funciones se puede encontrar el equilibrio de Nash.



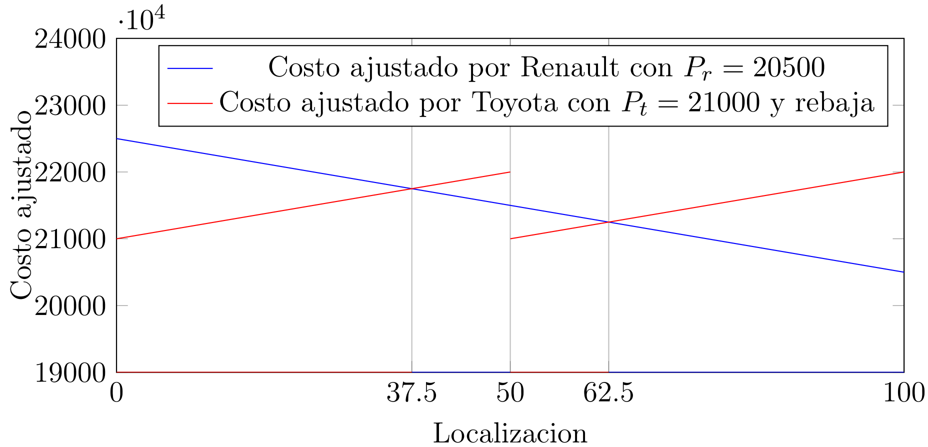
Como se puede observar el equilibrio se encuentra cuando ambas firmas tienen un precio de 21000 y las cantidades para cada una son de 50 autos vendidos. Dado que estas firmas reconocen que tienen fortalezas y debilidades en ciertos grupos de la población, una pregunta natural es ¿Qué estrategia podrían utilizar para mejorar sus beneficios? En la próxima sección se plantearan dos alternativas: realizar rebajas en la zona de baja influencia para ganar mercado o, por el contrario, realizar programas para fortalecer la lealtad en la zona alta influencia.

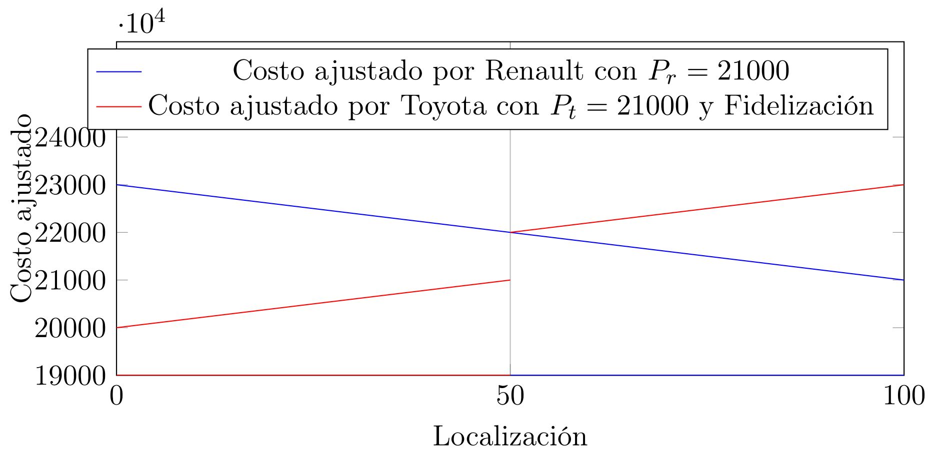
Hotteling: Ciudad Lineal - Rebajas

Se asume que las empresas pueden identificar las preferencias de los agentes entre Toyota y Renault, buscando ganar mayor participación del mercado asumamos que Toyota decide darle descuento de 1000 a los consumidores que son más afines con la marca Renault ($x > 50$), dado que ambas empresas ofrecen el mismo precio, la estrategia de Toyota logra robarle parte del mercado a Renault.

Como se logra observar en la figura anterior la rebaja hace que el costo de adquirir un Toyota para los individuos entre 50 y 75 sea menor que si compraran un Renault. Asumamos que Renault buscando aumentar su participación en el mercado reduce el precio a 20500.

Al reducir el precio Renault aumenta su participación en el mercado tanto en el área que había perdido como en la zona de mayor influencia de Toyota, por otro lado, pasa de tener 50000 en beneficios a obtener 75000, por lo que esa reducción en precio le es favorable. En el caso de Toyota la cuota de mercado



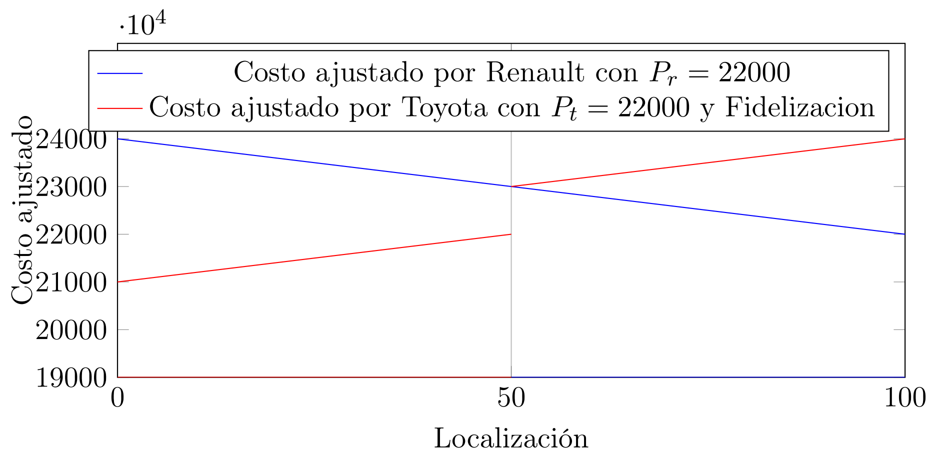


es exactamente la misma que tenía antes de la rebaja, pero los individuos que le arrebato a Renault tienen un descuento por lo que su beneficio es menor al que tenía antes de la rebaja.

Hotteling: Ciudad Lineal - Programas de fidelización

En este caso la firma tratara de fidelizar a sus compradores dándoles un descuento, para nuestro caso asumamos que Toyota decide dar un descuento de 1000 a todos los consumidores en su área de mayor influencia, es decir a quienes se encuentren a una localización menor a 50.

Al hacer el ajuste la competencia con Renault no se ve afectada, no obstante, tiene la oportunidad de subir precios sin perder poder de mercado. El precio



mayor de Toyota genera una ventana de oportunidad para que Renault suba su precio sin perder participación de mercado, generando un ciclo en el que ambas empresas pueden subir el precio hasta llegar a la máxima disponibilidad a pagar de sus consumidores y de esta forma apropiarse de todo el excedente del consumidor.

4.2.3. Modelo de Harbord - Hoernig

A continuación describimos el modelo de harbord (2012) este modelo es una aplicación del modelo de Hotteling para redes de telefonía celular, como particularidad en este modelo las empresas son ubicadas en forma de grafos donde los nodos representan empresas de telefonía celular y los individuos se encuentran uniformemente distribuidos a lo largo de las aristas que comunican dos nodos. En este modelo existe únicamente diferenciación horizontal que se entienden como preferencias por cada operador movil.

Por otro lado, los suscriptores tendrán dos tipos de llamadas, on-net (dentro de los suscriptores del mismo operador) y off-net (dentro de los suscriptores de otro operador).

Operadores

Suponemos que existen $n \geq 2$ operadores se presenta competencia imperfecta entre los operadores móviles por la provisión de un servicio sustituible y diferenciado horizontalmente como se mencionó anteriormente. Además, se presenta un operador fijo que provee un servicio no sustituible (no hay competencia entre los operadores móviles y el operador fijo). Definimos la participación de mercado (por suscriptores) de un operador i por α_i. Las redes móviles incurren en un costo fijo por suscriptor f_i. El costo por minuto de una llamada on-net $c_{ii} = c_{oi} + c_{ti}$ donde c_{oi} es el costo de la originación y c_{ti} el costo de terminación en la misma red. El costo de terminación (cargo de acceso) del operado i es a_i. Luego, el costo por minuto de una llamada off-net que se origina en i y termina en j es $c_{ij} = c_{oi} + a_j$.

En una red fija, el costo de terminación (cargo de acceso) es a_f. Luego, el costo por minuto de una llamada off-net que se origina en i y termina en f es $c_{if} = c_{oi} + a_f$. Dado que no existe competencia del operador fijo se excluye el costo de llamadas on-net en el operador fijo.

Tarifas

En cuanto a los ingresos de los operadores, estos están definidos por un cargo básico F_i por pertenecer a esa red i, por otro lado podrán cobrar un precio por minuto on-net p_{ii} para los suscriptores del operador i y el precio por minuto off-net de una llamada originada en i que termina en j será p_{ij} . Para simplificar el análisis se asume que el precio off-net es uniforme entre los operadores $p_{ij} = p_{ik}$. Por último, el precio por minuto de llamar a la red fija es p_{if}. El operador fijo cobra p_{fi} por minuto de llamada a un operador móvil.

Consumidores

Existe un número fijo de suscriptores, si p es el precio por minuto de una llamada, cada suscriptor recibirá como utilidad:

1. Una utilidad fija A_i por estar suscritos a una red i (denominado parámetros de asimetría de los operadores).
2. Utilidad por número y duración de llamadas por minutos originadas: $u(q)$ por llamada de duración q. Esta utilidad se mide en términos monetarios. Por definión, la demanda por minutos $q(p)$ satisface $u'(q(p)) = p$.
3. Utilidad de recibir llamadas (externalidad en las llamadas): $\beta u(q)$ por llamada de duración q. $\beta \in [0, 1]$ refleja la intensidad de la externalidad.

Por otro lado, el excedente del consumidor por llamada de duración q es $v(p) = u(q(p)) - pq(p)$. Para simplificar la notación se entenderá como: $q_{ij} = q(p_{ij}), u_{ij} = u(q_{ij}), v_{ij} = v(p_{ij}), etc.$

Antes de tomar en cuenta las preferencias por el operador, un suscriptor del operador i tiene un excedente w_i igual a:

$$w_i = M \sum_{j=1}^{n} \alpha(v_{ij} + \beta u_{ji}) + N(v_{if} + \beta u_{fi}) - F_i.$$

Donde M son los suscriptores de las redes móviles y N los suscriptores de la red fija. La primera parte del excedente representa el beneficio que se recibe por el número de individuos en cada red, teniendo en cuenta el excedente por llamadas realizadas y la externalidad de recibirlas.

Los operadores compiten con todos los demás operadores por los consumidores en sus vecindarios. Un consumidor a una distancia x_{ij} entre el operador i y j, medida desde i, es indiferente entre los dos operadores si:

$$w_i + A_i - tx_{ij} = w_j + A_j - t(\frac{2}{n(n-1)} - x_{ij})$$

Donde los operadores se han distribuido de tal forma que la longitud de un enlace entre dos operadores es $\frac{2}{n(n-1)}$ (obsérve que todos los enlaces tienen la misma longitud y la suma de las longitudes ha sido normalizada a 1) y t representa la intensidad de las preferencias horizontales. Note que si $n = 2$ tiene la misma estructura del modelo de la sección anterior. Despejando se obtiene:

$$x_{ij} = \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{2t}(w_i + A_i - w_j + A_j)$$

Sabemos que hasta x_{ij} todos los individuos se suscribirán al operador i, la participación de mercado del operador i será la suma de los suscritos por cada enlace con los demás operadores, luego:

$$\alpha_i = \sum_{j \neq i} x_{ij} = \alpha_{0i} + \sigma \sum_{j \neq i} (w_i - w_j)$$

Donde $\sigma = \frac{1}{2t}$ y $\alpha_{0i} = \frac{1}{n} + \sigma \sum_{j \neq i} (A_i - A_j)$

Las participaciones de mercado de los operadores pueden escribirse en forma matricial de la siguiente forma:

$$\alpha = G\alpha_0 + \sigma H(Nh_f - F) \tag{4.30}$$

Donde $B = (b_{ij})$ es una matriz $n \times n$ tal que $b_{ii} = n-1$ y $b_{ij} = -1$ para $j \neq i$, $G = (I - \sigma MBh)^{-1}$, $H = GB$, $F = (F_i)$, $h = (h_{ij})$ donde $h_{ij} = v_{ij} + \beta u_{ij}$ y $h_f = (h_{if})$ donde $h_{if} = v_{if} + \beta u_{fi}$.

Excedente, Beneficios y Bienestar

El excedente del consumidor en las redes móviles, incluyendo los costos de transacción de estar en una red son:

$$S = M\alpha^T(w + A) - M\sum_{i,j}\int_0^{x_{ij}} tzdz$$

El excedente del consumidor en las llamadas a la red fija es:

$$S^f = NM\sum_i \alpha_i(v_{fi} + \beta u_{if})$$

El beneficio de las firmas móviles es:

$$\pi_i = M\alpha_i(M\sum_j \alpha_j R_{ij} + NQ_i + F_i - f_i)$$

Donde $R_{ii} = (p_{ii} - c_{ii})q_{ii}$ es el beneficio de las llamadas on-net, $R_{ij} = (p_{ij} - c_{ij})q_{ij} + (a_i - c_{ti})q_{ji}$ es el beneficio de la llamadas off-net y $Q_i = (p_{if} - c_{if})q_{if} + (a_i - c_{ti})q_{fi}$ son los beneficios por terminación de llamadas móviles y terminación de fijas respectivamente. El beneficio de la red fija π^f se puede expresar de forma similar.

Las condiciones de primer orden de los operadores móviles permiten determinar F_i:

$$F_i = f_i - NQ_i + M\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(\hat{R}_{ij} - R_{ij}) \tag{4.31}$$

Donde $\hat{R}_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $R_{ij} = \frac{1}{\sigma M H_{ii}} - \sum_{j=1}^{n}\frac{H_{ji}}{H_{ii}}R_{ij}$.

Finalmente, el bienestar social es: $W = S + S^f + \Pi + \pi^f$, donde Π es el beneficio agregado de los operadores móviles.

Los operadores compiten en precios. El equilibrio de Nash es:

$$p_{ii} = \frac{c_{ii}}{1+\beta}$$

$$p_{if} = c_{if}$$

$$p_{ij} = \frac{\sum_{l\neq i}\alpha_l c_{il}}{1-(1+\beta)\alpha_i}, j \neq i$$

Note que en equilibrio el precio on-net será mayor con su costo y entre menor externalidad generan las llamadas de otras redes, esto producto de que la única fuente de utilidad serán las llamadas realizadas por lo que tendrá mayor importancia la selección de la red en la cual suscribirse. En el caso de las llamadas off-net se toma el costo ponderado por las participaciones de mercado de los otros operadores. Por otro lado, el precio será más alto entre más participación del mercado tenga la firma i, en cuanto a la externalidad de las llamadas el efecto es contrario a las llamadas on-net.

4.3. Asignación eficiente de bienes públicos

Consideremos una comunidad de n individuos que debe determinar el nivel x de provisión de un bien público para ellos. Cada individuo determina su contribución individual c_i. La contribución total C financia una cantidad $x = C$ del bien público. Adicionalmente, consideremos que cada individuo tiene una dotación inicial w_i de un bien privado.

Las preferencias de los individuos son de la forma:

$$U_i : R_+ \times (-\infty, w_i] \to R$$

donde U_i es creciente en el primer argumento (consumo del bien público), decreciente en el segundo (contribución individual) y estrictamente cóncava.

El problema que tendría que resolver un planificador central es:

$$\begin{aligned} &\text{máx} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i \\ &s.a \\ &x \leq C, x \geq 0, w_i \geq c_i. \end{aligned}$$

Suponiendo una solución interior, es fácil demostrar que la suma entre individuos de las tasas marginales de sustitución entre bienes públicos y privados es igual a la tasa marginal de transformación (condición de Bowen-Lindahl-Samuelson).

Ejercicio 4.9. Deducir la condición análoga de Bowen-Lindahl-Samuelson cuando la tecnología para producir el bien público es de la forma $f(C) = x$ donde f tiene las propiedades usuales.

Es fácil demostrar que un mecanismo descentralizado en el cual los individuos juegan un equlibrio de Nash es ineficiente. Una forma de reestablecer la eficiencia se basa en el concepto de equilibrio de Lindahl.

La estrategia (p_i^*, c_i^*, x^*) define un equilibrio de Lindahl para el problema en consideración si:

1. Maximización individual:

$$\begin{aligned} &\text{máx} \, U_i \\ &p_i^* x = c_i \\ &c_i, x \geq 0 \end{aligned}$$

2. $\sum_{i=1}^{n} p_i^* = 1$

3. $\sum_{i=1}^{n} c_i^* = x$

Ejercicio 4.10. Demostrar que todo equilibrio de Lindahl es eficiente.

Un mecanismo descentralizado alterno que reestablece la eficiencia es el mecanismo de Walker. Para ejemplificar, consideremos el siguiente juego. Cada jugador tiene como espacio de estrategias puras al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Las estrategias de los agentes son mensajes. Si m es el mensaje conjunto de todos los agentes la provisión del bien público se determina como:

$$x = \psi(m) = \text{máx}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{n}, 0\right\}$$

donde $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

La contribución que le corresponde a cada agente es:

$$c_i = \left(\frac{1}{n} + m_{i+1} - m_{i+2}\right)\psi(m)$$

donde los jugadores se identifican modulo n (esto sugiere una interpretación del juego en el que los agentes forman un círculo).

Las funciones de pago son:

$$\pi(m_1, ..., m_n) = U(\psi(m), \left(\frac{1}{n} + m_{i+1} - m_{i+2}\right)\psi(m)) \tag{4.32}$$

Para determinar si este mecanismo está bien definido es necesario verificar que dado cualquier mensaje, la contribución agregada es suficiente para producir $\psi(m)$ del bien público (ejercicio).

Ejercicio 4.11. Demostrar que (p_i^*, c_i^*, x^*) es un equilibrio de Lindahl sí y sólo si m^* es un equilibrio de Nash donde: $p_i^* = \left(\frac{1}{n} + m_{i+1}^* - m_{i+2}^*\right)$, $x^* = \psi(m^*)$ y $c_i^* = p_i^* x^*$.

4.4. Diseño de Mecanismos

La teoría del diseño de mecanismos es una teoría dual de la teoría de juegos. Informalmente su principal problema es, dada una asignación de recursos o resultado sobre el que un conjunto de agentes tiene preferencias, encontrar y estudiar el mecanismo (reglas de juego) tales que nuestra mejor predicción del resultado de la interacción de este conjunto de agentes (solución del juego) sea la asignación o resultado dado. Este se llama el problema de implementación.

Inicialmente comenzaremos estudiando mecanismos de información completa.

4.4.1. Elementos básicos

Sea $N = \{1, 2, ..., n\}$ un conjunto de agentes.

Definición 4.12 (Mecanismos)**.** Un mecanismo es $(\{M_i\}_{i\in N}, F, Y)$, donde para cada agente i, M_i es un conjunto de mensajes posibles del agente i, $M = \prod M_i$ es el conjunto de los mensajes posibles de todos los agentes, Y es un espacio de resultados y $F : M \longrightarrow Y$ es una regla de asignación del espacio de mensajes en los resultados.

Suponemos que las preferencias de cada agente se pueden representar por funciones de utilidad $u_i : Y \longrightarrow \mathbb{R}$. Alternativamente, la función de utilidad de cada agente es: $\widetilde{u}_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $\widetilde{u}_i(m) = u_i(F(m))$. Definimos $\mathbb{U}_i$ el conjunto de todas las funciones de utilidad posibles de cada agente en el sentido de la primera definición. Cuando los resultados son inciertos, restringimos el conjunto de utilidades a aquellas que tienen una representación en forma de utilidad esperada. Sea $T \subseteq \prod \mathbb{U}_i$. T se llama el espacio de tipos. Notemos que no hemos supuesto que T tiene una estructura de producto.

Vamos a suponer que los agentes observan $t \in T$ lo cual les revela sus preferencias individuales y las de todos los demás. Por eso decimos que la estructura de información es una de información completa, por lo menos para los agentes aunque no lo sea para el centro (diseñador, o principal).

Definición 4.13 (Correspondencia de elección social)**.** Una correspondencia (o regla) de elección social es una $F^S : T \rightrightarrows 2^Y$.

Intuitivamente, si el tipo de los agentes es $t \in T$ un planificador busca implementar un resultado en $F^S(t)$. Típicamente vamos a estar interesados en correspondencias sociales que son eficientes o óptimas en algún sentido.

Definición 4.14 (Eficiencia ex-post)**.** Una correspondencia F^S es eficiente ex-post si para todo $t \in T$, $F^S(t)$ es un conjunto de resultados eficientes (en el sentido de Pareto).

Todo mecanismo define un conjunto de juegos estáticos de información completa. Para cada $t \in T, t = (u_1, ..., u_n)$, sea $G_t = (N, (M_i)_{i\in N}, (\widetilde{u}_i)_{i\in N})$.

Suponemos que todos los juegos G_t son conocimiento común de todos los agentes. Notemos que $\widetilde{u}_i$ dependen del tipo t. Cuando sea necesario vamos a hacer explícita la dependencia escribiendo $u_i(,t)$ y $\widetilde{u}_i(,t)$.

La característica fundamental de un mecanismo en un ambiente de información completa es que cuando un agente es informado de su tipo también es informado del tipo de todos los demás. Esto determina la forma de las estrategias de los agentes. Para que el problema de implementación sea interesante, suponemos que el planificador central no es informado de ningún tipo.

Definición 4.15 (Estrategia)**.** Una estrategia para el jugador i es una función $\alpha_i : T \to M_i$.

La estrategia depende del tipo de todos los agentes. Esto es la característica fundamental del juego de información completa inducido.

4.4.2. Conceptos de solución

Definición 4.16 (Dominancia)**.** Una estrategia s_i domina débilmente a $\widetilde{s}_i$ si:

$$u_i\left(F \circ (s_i(t), m_{-i}), t\right) \geq u_i(F \circ (\widetilde{s}_i(t), m_{-i}), t)$$

$\forall m_{-i} \in M_{-i}$ and $\forall t \in T$ con desigualdad estricta para algun t y m_{-i}.

Una estrategia es débilmente dominante si domina débilmente a cualquier otra estrategia.

Definición 4.17 (Equilibrio en estrategias dominantes débilmente)**.** Un equilibrio estrategias dominantes débilmente del mecanismo (M, F, Y) es una estrategia conjunta $\overline{s} = (\overline{s}_1, ..., \overline{s}_I), \overline{s}_i : T \longrightarrow M_i$, tal para cada i, $\overline{s}_i$ es una estrategia débilmente dominante.

Definición 4.18 (Equilibrio ex-post o Nash)**.** Un equilibrio ex-post del mecanismo (M, F, Y) es una estrategia conjunta $\overline{s} = (\overline{s}_1, ..., \overline{s}_I), \overline{s}_i : T \longrightarrow M_i$, tal que:

$$u_i\left(F \circ \overline{s}\left(t\right), t\right) \geq u_i\left(F \circ \left(s_i\left(t\right), \overline{s}_{-i}\left(t\right)\right), t\right)$$

para todo $i \in \mathcal{I}, t \in T$ y para todas las estrategias $s_i : T \longrightarrow M_i$.

Este es un equilibrio de Nash del juego de información completa una vez revelada la información de todos los jugadores.

4.4.3. Implementación

Definición 4.19 (Implementación)**.** Una correspondencia social F^s es implementable en estrategias dominantes (débilmente) o estrategias ex-post, si existe un mecanismo (M, F, Y) y un equilibrio $\overline{s}$ tal que $F(\overline{s})$ es consistente con F^S (i.e., $F \circ \overline{s}$ es una selección de F^S: Para todo t, $F(\overline{s}(t)) \in F^S(t)$). Si para todo equilibrio $\overline{s}$ del mecanismo, $F(\overline{s}(t)) \in F^S(t)$ decimos que es fuertemente implementable. Decimos que la implementación es completa cuando todas las elecciones sociales de una correspondecia de elección se pueden obtener como un equilibrio de un mecanismo.[7]

Nota técnica 4.20. Implementación en estrategias dominantes también se denomina *strategy proof implementation*.

Dado $t \in T$, $t = (u_1, ..., u_I)$ y $y \in F^S(t)$ decimos que $t' \in T$, $t' = (u'_1, ..., u'_I)$ no aumenta los resultados preferibles a y con respecto a t si para todo i:

$$\{y' \in Y : u_i(y') \leq u_i(y)\} \subseteq \{y' \in Y : u'_i(y') \leq u'_i(y)\} \tag{4.33}$$

Definición 4.21 (Monotonicidad de la función de elección social)**.** Una función de elección social es monótona si se cumple la siguiente condición. Sea $t \in T$, y $y \in Y$ arbitrarios. Supongamos que $t' \in T$ no aumenta los resultados preferibles a y con respecto a t entonces $y \in F^S(t')$.

Teorema 4.22 (Maskin (1977))**.** Si una función de elección social es fuertemente y completamente implementable entonces es monótona.

4.4.4. El problema del Rey Salomón: No monotonicidad de la función de elección social

El Rey Salomón debe decidir a quién entregarle un niño entre dos mujeres, A y B que lo reclaman como su hijo. Su objetivo es entregárselo a la verdadera madre y amenaza con matarlo si no hay consenso entre la mujeres. Formalmente, sea $Y = \{a, b, c\}$, que representa los tres resultados finales: a si el niño se lo entregan a A, b si se lo entregan a B y c si lo matan.

El espacio es $T = \{(u^A(,\alpha), u^B(,\alpha)), (u^A(,\beta), u^B(,\beta))\}$ donde α indica que la mujer A es la verdadera madre y $u^A(a,\alpha) > u^A(b,\alpha) > u^A(c,\alpha)$ y

[7] La teoría de diseño de mecanismos se ocupa principlamente del primer problema de implementación. Esto determian en ocasiones, una diferencia importante entre en la literatura de la teoría de diseño de mecanismos y la literatura de implementación, que se ocupa principlamente del problema de implementación fuerte y completa.

$u^B(b,\alpha) > u^B(c,\alpha) > u^B(a,\alpha)$. Las preferencias cuando el tipo es β son análogas. Por simplicidad escribimos $T = \{\alpha, \beta\}$. Intuitivamente el espacio de tipos indica si A es la verdadera madre (tipo α) o B es la verdadera madre (tipo β).

Notemos que este es un problema de información completa: claramente cada mujer sabe quién es la verdadera madre. El que no sabe es el Rey Salomón. La regla de elección social que desea implementar el Rey Salomón es $F^S(\alpha) = a$ y $F^S(\beta) = b$, y esta función de elección social no es monótona. Luego, por el teorema de Maskin (1977) no es implementable (en un sentido fuerte y completo).

Para ver esto sea $t = \alpha$ y $y = a$. Ahora observemos que $t' = \beta$ no aumenta los resultados preferibles a a con respecto a α (en el estado α, a es el resultado preferible para A lo cual no cambia cuando el estado es β y, en el estado α, a es el peor resultado para B. Cuando el estado es α los preferibles al resultado a disminuyen para B). Por lo tanto, monotonicidad implicaría $\alpha \in F^S(\beta)$ lo cual es una contradicción. Más adelante veremos que un mecanismo dinámico sí podría implementar.[8]

4.4.5. El problema del Rey Salomón: Espacio de mensajes enumerable

En esta sección vamos a demostrar que el problema del Rey Salomón no es fuertemente implementable cuando el espacio de mensajes es de cierto tipo. Supongamos que el espacio de mensajes de cada mujer es de la forma $M^i = \{1, 2, 3, ...\}$ y que existe una regla de asignación $F : M^1 \times M^2 \to \{a, b, c\}$ que determinará un mecanismo que resuelve el problema del Rey Salomón. La función F se puede representar como una matriz $M = M^1 \times M^2$ donde el elemento $M_{i,j} = F(i, j)$. Supongamos además que el verdadero estado es α. Entonces a debe aparecer en la matriz en alguna parte.

Si suponemos que estamos en un equilibrio de Nash, B no tiene incentivos a desviarse cuando el tipo es α y como para B es mejor b o c entonces en la fila donde esta a solo hay a-es. Ahora supongamos que que el verdadero tipo es β y considere las mismas estrategias (i.e., las dos madres siguen enviando los mismos mensajes que cuando el verdadero tipo era α). En este caso a sigue siendo un equilibrio de Nash porque en la fila donde está a, no hay incentivos a desviarse, una contradicción.[9]

[8] Maskin (1977, 1999) prueba que si la función de elección social satisface la propiedad de no existencia de poder de veto y hay tres o más individuos, entonces es implementable.

[9] En el próximo ejemplo se introduce un nuevo resultado d que consiste en matar a

En conclusión esto muestra que no existe un mecanismo que resuelva el problema de implementación fuerte del Rey Salomón.

Ahora, si enriquecemos el espacio de mensajes (Palfrey y Srivastara (1991)) muestra que el problema del Rey Salomón si es implementable fuertemente en equilibrios de Nash no dominados débilmente. Supongamos que permitimos el resultado d matar a todos: A,B e hijo. El espacio de mensajes de cada mujer es: $M = \{(t, n) : t = \alpha, \beta, n = 1, 2, 3, ..\}$. La segunda componente del mensaje puede interpretarse como qué tan fuerte habla la mujer.

Los pagos son los siguientes. Si se contradicen sobre cuál es la verdadera madre el resultados es d (el peor resultado posible para todos). Caso contrario los pagos son:

A\B	1	2	3	4	...
1	a	a	a	a	
2	c	a	a	a	
3	c	c	a	a	
4	c	c	c	a	
...					

cuando ambas anuncian α, o:

A\B	1	2	3	4	...
1	b	c	c	c	
2	b	b	c	c	
3	b	b	b	c	
4	b	b	b	b	
...					

cuando ambas anuncian β.

Ejercicio 4.23. Las siguientes estrategias son un equilibrio de Nash en estrategias no dominadas débilmente: revelar quién es la verdadera madre y $n = 1$.

Ejercicio 4.24. Competencia a la Bertrand y diseño de mecanismos (el mundo real!). Considere un mercado oligopolista donde n empresas idénticas con costos marginales iguales a cero producen un bien homogéneo perfectamente divisible donde es prohibido la entrada de más firmas y suponga que

todos incluidas las madres. Bajo el supuesto de que este es el peor resultado para todos, el argumento anterior sigue siendo válido.

compiten por suplir dos mercados. El mercado E tiene una demanda infinita al precio exógeno p^E. En el mercado D las firmas enfrentan una demanda inelástica D. Piense en el mercado E como un mercado de exportación y D como un mercado interno. El precio de importación es exógeno e igual a p^I además $p^I > p^E$ (es decir es más caro importar que exportar y ambos precios son exógenos para las firmas).

La capacidad de producción agregada de las firmas es Q, que suponemos es superior a la demanda D interna. Denotamos por $Q_i = Q/n$ la capacidad de producción de cada firma.

1. Suponga que las firmas compiten en precios a la Bertrand. Cuál es el equilibrio de Nash en precios en el mercado D y cuál es la particpación de cada firma en el mercado interno? Ayuda: El precio de equilibrio es único y es uno de los precios ya introducidos arriba. Existen muchas participaciones que soportan el único precio. Todas ellas debe satisfacer una condición de equilibrio agregado.

2. Cuál es el beneficio de las firmas en este caso?

3. Sea $x = D/Q$ y suponga que la firmas se ponen de acuerdo verbalmente para vender en el mercado interno a un precio p^I. Luego suplen la demanda del mercado D y el resto lo venden en el mercado E. Suponiendo que este arreglo es sostenible, cuál es el beneficio de las firmas en este caso? Es este arreglo estable (recuerde que en ausencia de un mecanismo coercitivo cada firma procuraría maximizar su propio beneficio)? Ayuda: Si el arreglo es sostenible las firmas venderian todo su producto a un precio promedio:

$$\overline{p} = x \times p^I + (1 - x)p^E \tag{4.34}$$

$$= p^E + \frac{D}{Q}(p^I - p^E) \tag{4.35}$$

4. Considere ahora el siguiente mecanismo. Suponga que un productor i vende una proporción x_i de su producción en el mercado nacional al precio de importación p^I. Su beneficio π_i antes de las cesiones y compensaciones del mecanismo es (esta es la función de beneficios de las firmas en ausencia de mecanismo):

$$\pi_i = p^I \times x_i Q_i + p^E \times (1 - x_i)Q_i \tag{4.36}$$

La compensación neta del mecanismo, CM se define como:

$$CM = p^I \times (x - x_i)Q_i + p^E \times ((1 - x) - (1 - x_i))Q_i \tag{4.37}$$

La lógica de esta compensación neta es que si el productor vende más que la proporción x en el mercado interno, debe cederle al fondo que implementa el mecanismo: $p^I \times (x_i - x)Q_i$ y el fondo lo compensará con $p^E \times ((1 - x) - (1 - x_i))Q_i$.

Por lo tanto, el beneficio del productor $\overline{\pi}_i$, post compensaciones y cesiones netas del mecanismo es:

$$\overline{\pi}_i = \pi_i + p^I \times (x - x_i)Q_i + p^E \times ((1 - x) - (1 - x_i))Q_i$$

y sustituyendo π_i se obtiene:

$$\overline{\pi}_i = \overline{p} \times Q_i$$

En conclusión, con este mecanismo, expost el productor es indiferente del mercado en que venda y todas sus unidades se venden en promedio al precio $\overline{p}$.

Suponiendo que la anterior descripción del mercado constituye un equilibrio de Bertrand muestre que los beneficios y precios coinciden con el resultado en que las firmas acuerdan vender a ciertos precios bajo el supuesto de que el arreglo entre ellas es sostenible (item (c) arriba).

El ejemplo siguiente demuestra que el mecanismo anterior en efecto implementa el arreglo colusivo discutido en este ejercicio.

Ejercicio 4.25. Escribir formalmente el problema anterior como un problema de diseño de mecanismos. Más específicamente sea el espacio de tipos $T = \{(q_1, ..., q_n, p^I, p^E) : \sum_i q_i = D\}$ y $M_i = R_+, Y = \{(p_1^M, ..., p_n^M, \bar{p}^I, \bar{p}^E)\}$.

1. Escribir la regla de asignación del mecanismo.

2. Escribir las funciónes de beneficios de los agentes en presencia del mecanismo.

3. Escribir la función de elección social que este mecanismo implementa.

4.5. Teoría de Redes

Una red es una pareja (N, g) donde $N = \{1, ..., n\}$ es un conjunto de nodos (i.e., agentes), g es una matriz cuadrada de dimensión n, denominada la matriz de adyacencia de la red y cada elemento de la matriz g_{ij} satisface que, para todo i, j, $g_{ij} \in \{0, 1\}, g_{ij} = g_{ji}$ y $g_{ii} = 0$. Los unos de esta matriz representan los enlaces entre los nodos. Es decir, $g_{ij} = 1$ si y solo si, existe un enlace entre i y j. El panel de la figura 4.6 es una representación gráfica de todas las posibles redes entre un conjunto de tres nodos.

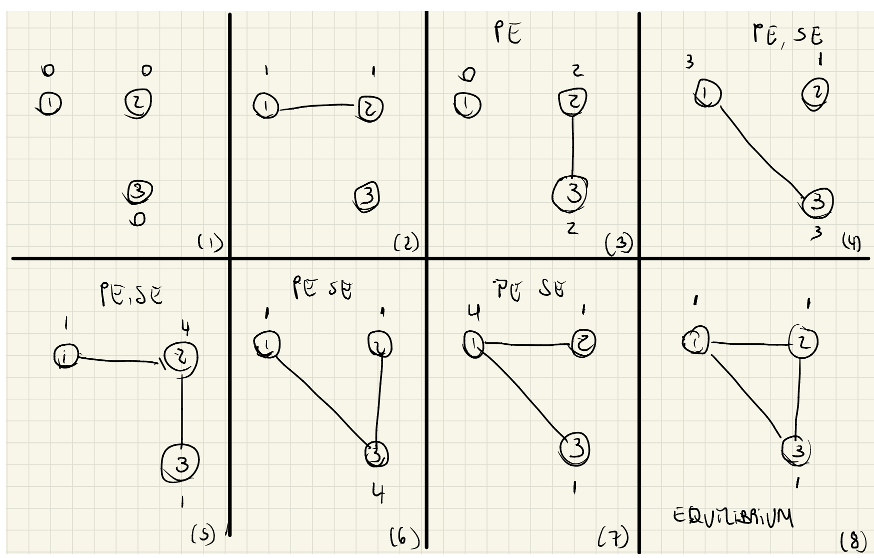
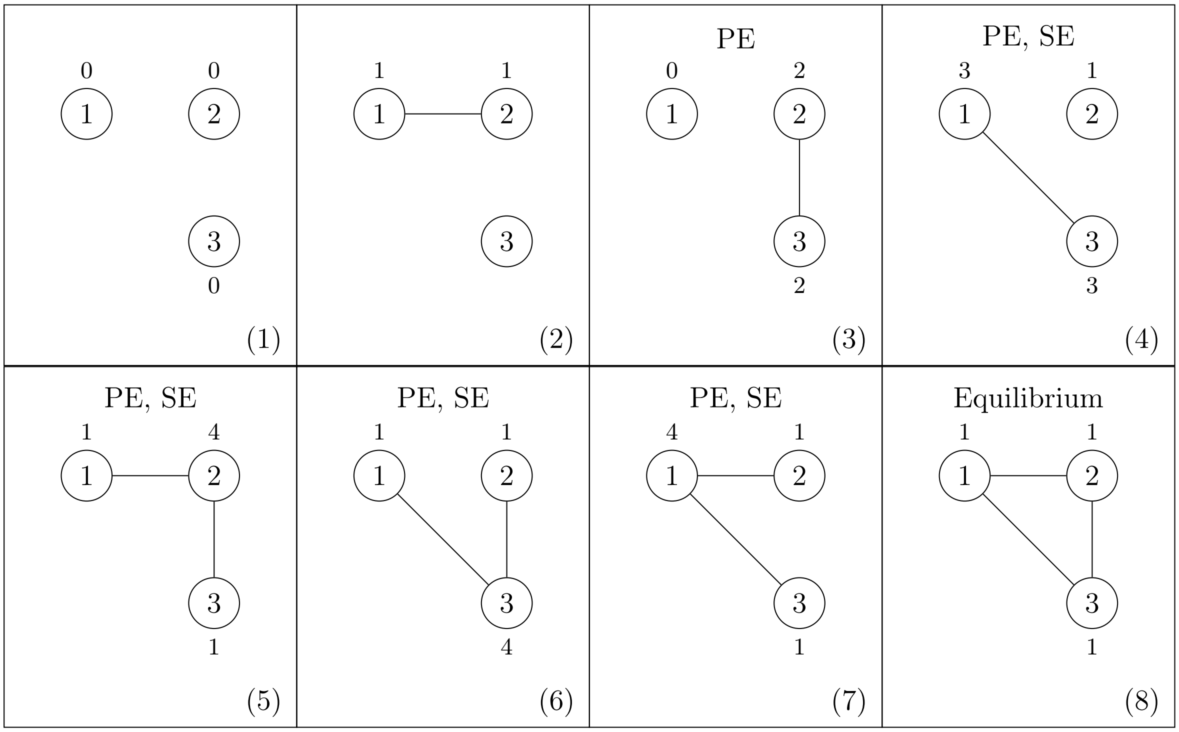


Figura 4.6: La figura muestra todas las redes posibles de tres nodos. Los círculos representan los nodos, cada nodo lo distinguimos con un número (en el interior del círculo) y los enlaces entre los nodos se representan por las líneas que los unen.



En el gráfico los círculos representan los nodos, cada nodo lo distinguimos con un número (en el interior del círculo) y los enlaces entre los nodos se representan por las líneas que los unen (más abajo explicamos que representan los números por fuera de los círculos). Entonces, por ejemplo, el panel de la figura 4.6, la figura 3 representa una red de tres nodos cuya matriz de adyacencia es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

y la figura 7 representa una red de tres nodos cuya matriz de adyacencia es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

En efecto, nuestra definición de red es un ejemplo muy sencillo de lo que más generalmente se conoce como un grafo, no dirigido, sin *loops* y sin pesos. Para efectos de ilustrar las ideas principales de la teoría de juegos en grafos, este modelo es suficiente.

Supongamos ahora que los nodos son agentes y que cada agente tiene una función de utilidad que depende de la estructura de la red. Sea $G(n)$ el conjunto de todas las redes con n agentes. Para cada agente i suponemos que existe una función de utilidad $u_i : G(n) \to R$ tal que $u_i(g)$ representa la utilidad que cada agente deriva de la estructura de red g. Por ejemplo, si la red representa uan red de amistades (i.e., los nodos son personas y los enlaces son relaciones de amistad), entonces $u_i(g)$ representa la utilidad de las relaciones de amistad entre todas las personas. Obsérvese que en este caso la utilidad de una persona no depende únicamente de sus amistades directas sino, como en principio puede ser en el mundo real, también depende las relaciones de amistad que hay entre los demás. En el panel de la figura 4.6, la utilidad de cada estructura de red se representa por el número por fuera de los círculos. Por ejemplo para los agentes $1, 2$ y 3, la estructura de la red de la figura 7 les da utilidad $4, 1$ y 2 respectivamente.

4.5.1. Eficiencia

Teniendo funciones de utilidad podemos definir cosas muy interesantes. Por ejemplo, decimos que una red es eficiente socialmente si maximiza la suma de la utilidad de todos los agentes y decimos que es eficiente en el sentido de Pareto si no existe otra red tal que la utilidad de los agentes no disminuya y por lo menos para uno de ellos aumente. No es difícil convencerse que si una red es eficiente socialmente entonces es eficiente en el sentido de Pareto. Los ejemplos de arriba demuestran que el converso no es cierto. En el panel de la figura 4.6, la figura 2 representa una red que no es eficiente en el sentido de Pareto. La red 3 es eficiente en el sentido de Pareto pero no eficiente socialmente y las redes 4 y 7 son son eficientes socialmente.

Ejemplo 4.26 (Modelo de Conexiones Simétricas)**.** La utilidad $u_i(g)$ que recibe un jugador i de una red g es:

$$u_i(g) = \sum_{j \neq i, i\ j \text{ con un camino que los conecta en } g} \delta^{l_{ij}(g)} - d_i(g)c$$

donde $\delta \in (0,1)$, $l_{ij}(g)$ es el número de vértices en el camino más corto ente i, j, d_i es el grado de i (el número nodos que están enlazados con i) y c es una constante que refleja el costo para un individuo de mantener un enlace. Algunas observaciones: (1) Si el costo es muy bajo (inferior a $\delta - \delta^2$) el grafo eficiente es tener el máximo número de elaces. Si el costo es mayor que ese umbral pero no muy grande, el grafo eficiente es una estrella.

Ejercicio 4.27. Demostrar las afirmaciones anteriores sobre las propiedades de eficiencia del modelo de conexiones simétricas.

Ahora podemos preguntarnos cuál es el resultado de la interacción estratégica de un conjunto de jugadores en una red, y para esto, necesitamos un concepto de equilibrio (una teorá positiva del comportamiento).

4.5.2. Estabilidad por Pares

El concepto de estabilidad por pares introducido por Jackson y Wolinsky (1996), es una extensión natural del concepto de equilibrio de Nash pero observesé que va más allá de este y el concepto de equilibrio de Nash, pos si solo, no es una buena herramienta de análisis.

Definición 4.28 (Estabilidad por pares)**.** Decimos que una red (N, g) es estable por pares si:

1. Ningún agente puede beneficiarse de romper con un enlace en el que está directamente involucrado.

2. Ningún par de agentes puede beneficiarse (por lo menos uno de ellos estrictamente) de crear un nuevo enlace.

Es fácil ver que en el panel de la figura 4.6, la única red que es estable por pares es la red de la figura 8. Obsérvese que como es usual en problemas de interacción estratégica, el equilibrio puede no ser eficiente. El concepto anterior de estabilidad por pares, sirve para racionalizar que la formación de redes de forma endógena. Es decir, a diferencia de los modelos de formación aleatoria de redes, este modelo sugiere que las redes que se forman son aquellas que son estables.

Ejemplo 4.29 (Modelo de Conexiones Simétricas)**.** Algunas propiedades importantes (para las demostraciones véase Jackson [2008]):

1. Cuando el costo es bajo existe una única red estable por pares que es la red que tiene el máximo número de enlaces.

2. Cuando el costo es mayor, la estrella es estable por pares pero hay muchas más estructuras de redes que son estables. Por ejmplo, cuatro jugadores conectados en un círculo puede ser estable en el rango de costos en el que la estrella es estable y eficiente.

3. Esto pone de manifiesto la posibilidad de que en equilibrio, las redes no necesariamente son eficientes.

4. Con costos aún mayores la estrella puede ser eficiente pero no estable por pares.

Por último, una pregunta importante es qué tan distante en términos de utilidad está un equilibrio de la utilidad de eficiencia. Puesto que existen varias redes en equilibrio, se pueden distinguir dos casos. (1) Utilidad de eficiencia dividido por la menor utilidad en equilibrio (denominado precio de la anarquía). (2) Utilidad de eficiencia dividido por mayor utilidad en equilibrio (denominado precio de la estabilidad). Obsérvese que el precio de la anarquía es siempre superior al precio de estabilidad. El estudio del precio de la anarquía es una área investigación importante pues tiene implicaciones importantes en muchas áreas como transporte urbano, internet, etc.

4.5.3. Juegos Gráficos

El modelo anterior es un modelo de formación estratégica de redes. En esta sección vamos a estudiar algunos modelos básicos de comportamiento estartégico en redes predefinidas. Estos modelos se conocen como modelos gráficos. Estos juegos sirven como prototipo para la modelación de interacciones sociales en la que los agentes están expuestos a presiones sociales o de grupo (*peer effects*) como fumar, consumir ciertos bienes, pertencer a un club social, etc. Así mismo, da luces sobre actividades que tengan externalidades como, la empresa con la que tenemos nuestro servicio de telefonía móvill, o comprar cierta tecnología colaborativa, etc.

Sea (N, g) una red donde N representa el conjunto de los jugadores. Cada jugador i tiene la posibilidad de tomar una acción binaria $x_i \in \{0, 1\}$ en cada uno de sus nodos. La utilidad de cada agente es $u_i(x_i, x_{N_i(g)})$, donde $N_i(g)$ denota el conjunto agentes enlazados con i. Es decir la utilidad de un agente depende no solamente de su acción sino también de la acción de todos los agentes que están enlazados con i.

Ejemplo 4.30 (Juegos con acciones complementarias de umbrales)**.** Supongamos que:

$$u_i(1, x_{N_i(g)}) > u_i(0, x_{N_i(g)}), \text{ sí y sólo sí } \sum_{j \in N_i(g)} x_j \geq t_i$$

donde t_i es el umbral de cada jugador.

Ejemplo 4.31 (Bienes públicos)**.** Supongamos que las funciones de utilidad satisfacen:

$$\begin{aligned} u_i(1, x_{N_i(g)}) &= 1 - c, 0 < c < 1 \\ u_i(0, x_{N_i(g)}) &= 1, \text{ si existe j tal que } j \in N_i(g), x_j = 1 \\ u_i(0, x_{N_i(g)}) &= 0 \text{ si para todo j tal que } j \in N_i(g), x_j = 0. \end{aligned}$$

Intuitivamente, cada agente prefiere que se tome la acción a no tomarla, pero prefiere que otros lo hagan en vez de él hacerlo.

En un juego gráfico que la noción de equilibrio de Nash se extiende de forma natural. Una estrategia conjunta $x = \{x_1, ..., x_n\}$ es un equilibrio de Nash si:

$$\begin{aligned} u_i(1, x_{N_i(g)}) &\geq u_i(0, x_{N_i(g)}) \text{ si } x_i = 1 \\ u_i(0, x_{N_i(g)}) &\geq u_i(1, x_{N_i(g)}) \text{ si } x_i = 0. \end{aligned}$$

En general, en un juego graáfico pueden existir muchos equilibrio de Nash. El lector puede consultar algunos ejemplos y más detalles en Jackson (2008).

4.6. Existencia del Equilibrio Walrasiano*

En esta sección extendemos a Aumann (1966) a economías con mercados de activos incompletos. El objetivo principal es mostrar que, inclusive en economía con mercados de activos incompletos, se puede prescindir del supuesto de convexidad en las preferencias siempre y cuándo existan muchos otros agentes(un continuo de agentes)

Considere una economía con dos periodos $t \in \{0, 1\}$ e incertidumbre sobre la realización del estado de la naturaleza en el segundo periodo $t = 1$. Hay un conjunto finito $\sim$ de posibles estados de la naturaleza que pueden observarse en $t = 1$, a saber $\mathbb{S} = \{1, ..., S\}$ y $s = 0$ denota el único estado de la naturaleza en el periodo $t = 0$. Sea $\mathbb{S}^* = \mathbb{S} \cup 0$.

Hay un conjunto finito $\mathbb{L} = \{1, ..., L\}$ de commodities perfectamente divisibles y perecederos que pueden ser demandados para consumo en mercados a la vista en cada estado de la naturaleza en el segundo periodo. Denotamos por $p_s \in \mathbb{R}^L_+$ el vector de precios a la vista de commodities en la economía.

Existe un conjunto finito $\mathbb{J} = \{1, ..., J\}$ de activos numerarios que pagan en unidades del primer commodity. Una unidad del activo $j \in J$ paga la cantidad $N_{s,j}$ de unidades del *commodity* 1 en caso de que se observe el estado de la naturaleza $s \in \mathbb{S}$. Los activos están disponibles en el primer periodo en un mercado *spot* perfectamente competitivo de activos. Sea $q \in \mathbb{R}^J$ el vector unitario de precios de activos en $t = 0$ y se supone que la oferta neta de activos es cero. Una asignación para un agente es un vector $(x, z) \in \mathbb{R}^{L\times S}_+ \times \mathbb{R}^J$ donde x denota la demanda de extitcommodities en el segundo periodo en cada estado y z denota la demanda por activos financieros en el primer periodo.

Hay un continuo medible de agentes representado por $[0, 1]$ (dotado con la medida de Lebesgue) que buscan reasignar su ingreso a través del tiempo usando activos financieros. Por tanto, dados precios (p, q), cada agente $t \in [0, 1]$ (t repetido). quiere maximizar una función objetivo $U^t : \mathbb{R}^{L\times S}_+ \to \mathbb{R}$ (que representa sus preferencias sobre el consumo) escogiendo una asignación de su conjunto de presupuestal $B^t(p, q)$, definido como el conjunto de asignaciones financieras y de consumo $(x, z) \in \mathbb{R}^{L\times S}_+ \times \mathbb{R}^J$ que satisfacen

$$\sum_{j\in J} q_j z_j \leq 0; \qquad\qquad p_s x_s \leq p_s w^t_s + \sum_{j\in J} p_{s,1} N_{s,j} z_j, \;\; \forall s \in S.$$

donde $w^t := (w^t_s; s \in S) \in \mathbb{R}^{L\times S}_+$ es la dotación inicial de *commodities* del agente $t \in [0, 1]$.

Dado que las restricciones al comercio financiero y de consumo son homogeneas de grado cero en (p, q), se asumirá, sin pérdida de generalidad, que $(p, q) \in \triangle^S \times Q$, donde $\triangle = \left\{p \in \mathbb{R}^L_+ : \|p\| = 1\right\}$, $Q = \left\{q \in \mathbb{R}^J_+ : \|q\| = 1\right\}$, y donde, dado $x \in \mathbb{R}^m$, $\|x\| \equiv \sum\limits_{i=1}^{m} |x_i|$.

Sea $\mathbb{U}(\mathbb{R}^{L\times S}_+)$ el espacio de todas las funciones de utilidad con valores en los reales sobre $\mathbb{R}^{L\times S}_+$ con la topología de la norma supremo.

Definición. Un equilibrio de la economía $\mathcal{E}$ está dado por un vector de precios $(\overline{p}, \overline{q}) \in \triangle^S \times Q$, conjuntamente con asignaciones financieras y de consumo $\left(\overline{x}^t, \overline{z}^t\right) \in \mathbb{R}^{L\times S}_+$ para cada agente $t \in [0, 1]$, de forma que

(1) Para cada agente $t \in [0,1]$,

$$\left(\overline{x}^t, \overline{z}^t\right) \in \text{argmax}_{(x,z)\in B^t(\overline{p},\overline{q})} U^t(x);$$

(2) Los mercados financieros y de *commodities* se vacían. Es decir,

$$\int_{[0,1]} \overline{x}_s^t dt = \int_{[0,1]} w_s^t dt, \;\; \forall s \in S; \qquad\qquad \int_{[0,1]} \overline{z}_j^t dt = 0, \;\; \forall j \in J.$$

Una técnica estándar para probar la existencia de equilibrio competitivo con mercados de activos incompletos es truncar el espacio de activos y *commodities* (ver Geanakoplos y Polemarchakis (1986)), probar la existencia de un equilibrio para esta economía truncada y luego, al relajar sucesivamente estas restricciones, mostrar que la secuencia de equilibrios de las economías restringidas converge a un equilibrio en la economía original (no restringida). En aras de enfocarnos en la aplicación del teorema generalizado de juegos continuos en la sección anterior, mostraremos como aplicar dicho teorema a una economía truncada. Sea $K \subset \mathbb{R}^{S\times L} \times \mathbb{R}^A$.

Para cada individuo $t \in [0,1]$, considere la restricción presupuestal truncada $B^t(p,q;K) = B^t(p,q) \cap K$.

Un equilibrio competitivo K-truncado para la economia $\mathcal{E}$ está dado por un vector de precios $(\overline{p},\overline{q}) \in \triangle^S \times Q$, conjuntamente con asignaciones financieras y de consumo $\left(\overline{x}^t, \overline{z}^t\right) \in \mathbb{R}_+^{L\times S}$ para cada agente $t \in [0,1]$, de forma que los agentes maximizan su función objetivo sujetos a sus restricciones presupuestales truncadas y los mercadaos financieros y de *commodities* se vacían.

El punto más importante del siguiente teorema es que, aunque algunas funciones de utilidad no son necesariamente cuasi-cóncavas, podemos probar la existencia de un equilibrio usando nuestro resultado principal sobre la existencia de equilibrios en estrategias puras en juegos continuos no-convexos generalizados con jugadores atómicos. La prueba es en el mismo espíritu de Debreu (1952) donde se muestra la existencia de un equilibrio competitivo en el modelo estándar de Arrow-Debreu.

Teorema 4.32. Considere una economía $\mathcal{E}$ y sea $K = [-k_1, k_1]^{S\times L} \times [-k_0, k_0]^J$ un rectángulo compacto centrado en el orígen. Suponga que se satisfacen las siguientes condiciones

- Para todo $t \in [0,1], w^t >> 0$ y existe $W \in \mathbb{R}$ tal qué $\left\|w^t\right\| \leq W$.

- Para cualquier agente $t \in [0,1]$, la función de utilidad U^t es continua y estrictamente creciente (i.e., $U^t \in \mathbb{U}(\mathbb{R}_+^{L\times S})$) y el mapa $t \to U^t$ es medible.
- Los pagos son no negativos. Es decir $N > 0$ ($N_{s,j} \geq 0; N_{s,j} \neq 0$).
- Se tiene $k_0 > W$ y $k_1 > W + \|N\| \, k_0$.

Entonces, existe un equilibrio K-truncado para la economía $\mathcal{E}$.

Prueba. Se divide la prueba en tres pasos.

Paso 1. Existencia del equilibrio en un juego abstracto generalizado.

Considere un juego $\mathcal{G}_K(T, (K_t, \Gamma_t, u_t)_{t\in T}, h)$ donde el conjunto de jugadores es $T = [0,1] \cup S^*$. Para cada jugador $t \in [0,1]$, el espacio de acciones es $K_t = K$. Para el jugador atómico $s = 0$, sea $K_0 = Q$ y para $s \neq 0$, sea $K_s = \triangle$. Denotamos por (x^t, z^t) las acciones del jugador $t \in [0,1]$, por q las acciones de $s = 0$, y por p_s las acciones del jugador s, con $s \in S$.

Sea $h : K \to K$ la función identidad, entonces el espacio de mensajes es:

$$M = \left\{ \int_{[0,1]} (x^t, z^t) dt; \quad (x^t, z^t) : [0,1] \to K, \text{is measurable} \right\}.$$

La correspondencia de estrategias admisibles para un jugador $t \in [0,1]$, $\Gamma_t : M \times \triangle^S \times Q \twoheadrightarrow K$ está definida por $\Gamma_t(m,p,q) = B^t(p,q;K)$. Para $s = 0$ defina $\Gamma_s : M \times \triangle^S \twoheadrightarrow K_0$ por $\Gamma_s(m,p) = K_0$ y para $s \neq 0$ defina $\Gamma_s : M \times \triangle^{(S-1)} \times Q \twoheadrightarrow K_s$ por $\Gamma_t(m, p_{-s}, q) = K_s$ donde p_{-s} equivale al vector p omitiendo p_s.

Para terminar la descripción del juego, definimos la utilidades para jugadores atómicos de la siguiente forma:

$$U_s(m,p,q) = q \cdot \int_{[0,1]} z_j^t dt, \quad \text{if } s = 0;$$

$$U_s(m,p,q) = p_s \cdot \int_{[0,1]} (x_s^t - w_s^t) dt, \quad \text{if } s \in S.$$

Por definición, los espacios de estrategias de los jugadores son no vacíos y compactos. La suposición (a) en el enunciado del teorema 4.32 aseguran que para cualquier $t \in [0,1]$ la correspondencia de estrategias admisibles Γ_t es continua con valores no-vacíos y compactos. Dado que $\triangle$ y Q son no-vacíos, compactos y convexos, se sigue que, para cualquier $s \in S^*$, la correspondencia Γ_s es continua y tiene valores no-vacíos, compactos y convexos. Las funciones objetivo son, por hipótesis, continuas y, para cualquier $s \in S^*$, U_s es lineal respecto a su propia estrategia y, por lo tanto, cuasi-cóncava respecto a esta. Por lo tanto las condiciones (i) y (ii) del **?** se satisfacen. Las condiciones (iii) y (iv) del Teorema 1 se satisfacen trivialmente, puesto que todos los jugadores en $[0, 1]$ tienen el mismo espacio de acciones. Además, por el supuesto (b), el mapa $t \to U_t$ es medible; por lo que la condición (v) del Teorema 1 se satisface también.

Concluímos que el juego $\mathcal{G}(T, (K_t, \Gamma_t, u_t)_{t\in T}, h)$ tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras.

Paso 2. Dado K que satisfaga la condición (iv), en cualquier equilibrio de Nash en estrategias puras $\mathcal{G}(T, (K_t, \Gamma_t, u_t)_{t\in T}, h)$*, cada jugador* $t \in [0, 1]$ *tiene activa su restricción presupuestal.*

Si para algún jugador $t \in [0, 1]$ la restricción presupuestal para el primer periodo no está activa, entonces $\overline{z}^t = (k_0, ..., k_0) \in \mathbb{R}^J$. De hecho, en otro caso, el jugador t puede incrementar su consumo en $t = 1$ (como consecuencia de la no-trivialidad del pago de activos, i.e., la condición (c) en el enunciado del Teorema). Se sigue que, si algún agente t tiene una restricción presupuestal inactiva en el primer periodo, entonces

$$W = W(\|\overline{q}\|) < \sum_{j\in J} \overline{q}_j k_0 \leq 0,$$

una contradicción.

Paso 3. Dado K que satisfaga la condición (iv), cualquier equilibrio de Nash en estrategias puras del juego $\mathcal{G}(T, (K_t, \Gamma_t, u_t)_{t\in T}, h)$ *es un equilibrio* $K-$*truncado de la economía* $\mathcal{E}$*.*

Sea $\big((\overline{p}, \overline{q}); ((\overline{x}^t, \overline{z}^t); t \in [0, 1])\big)$ un equilibrio de Nash en estrategias puras de $\mathcal{G}(T, (K_t, \Gamma_t, u_t)_{t\in T}, h)$.

Como consecuencia de los pasos anteriores, se sigue de la desigualdad (2) que,

$$q \int_{[0,1]} \overline{z}^t dt \quad \leq \quad 0, \ \ \forall q \in Q. \tag{4.40}$$

Evaluando la desigualdad anterior en los vectores canónicos de $\mathbb{R}^J_+$ (Los cuales pertenecen a Q), obtenemos que

$$\int_{[0,1]} \overline{z}_j^t dt \leq 0, \ \ \forall j \in \mathbb{J}.$$

También para $s \in S$,

$$\overline{p}_s \cdot \int_{[0,1]} (\overline{x}_s^t - w_s^t) dt = \sum_{j \in \mathbb{J}} N_{s,j} \int_{[0,1]} \overline{z}_j^t dt \leq 0, \ \ \forall j \in \mathbb{J}.$$

Se sigue de la desigualdad que

$$p_s \cdot \int_{[0,1]} (\overline{x}_s^\theta - w_s^\theta) dt \leq 0, \ \forall s \in S, \forall p_s \in \triangle,$$

Lo cual implica que, para cualquier $(l, s) \in \mathbb{L} \times \mathbb{S}$,

$$\int_{[0,1]} (\overline{x}_{s,l}^t - w_{s,l}^t) dt \leq 0.$$

Dado que, para cada $t \in [0,1]$, la función de utilidad U^t es estrictamente creciente, los precios de extitcommodities y activos son estrictamente positivos. De hecho, si existiera un *commodity* $l \in L$ tal que $\overline{p}_{s,l} = 0$, para algún $s \in S^*$, entonces cada jugador $t \in [0,1]$ haría $\overline{x}_{s,l}^t = k_1$ y por tanto

$$k_1 = \int_{[0,1]} \overline{x}_{s,l}^t dt \leq \int_{[0,1]} w_{s,l}^t dt \leq W < k_1,$$

una contradicción. Análogamente, si $\overline{q}_j = 0$, para algún $j \in \mathbb{J}$, entonces cada agente $t \in [0,1]$ haría $\overline{z}_j^t = k_0$ y por tanto

$$k_0 = \int_{[0,1]} \overline{z}_j^t dt \leq 0,$$

una contradicción también.

Dado que $(\overline{p}, \overline{q}) \gg 0$ y las restricciones presupuestales de los individuos están activas para cada estado de la naturaleza $s \in S^*$, sigue que

$$\int_{[0,1]} (\overline{x}_{s,l}^t - w_{s,l}^t) dt = \quad 0, \ \ \forall (s,l) \in \mathbb{S}^* \times \mathbb{L} \tag{4.41}$$

$$\int_{[0,1]} \overline{z}_j^t dt = \quad 0, \ \ \forall j \tag{4.42}$$

De las condiciones (1), (5) y (6) concluímos que el equilibrio en estrategias puras del juego generalizado $\mathcal{G}(T, (K_t, \Gamma_t, u_t)_{t \in T}, h)$ es un equilibrio $K-$truncado equilibrium para la economía $\mathcal{E}$. $\square$

4.7. Aprendizaje de Máquinas

El problema central del aprendizaje de máquinas, una subárea de las ciencias de la computaciónón y la inteligencia artificial, es encontrar patrones en un conjunto de datos observados. Por ejemplo, dada una base de datos de registros médicos de un conjunto de pacientes, determinar las características (edad, sexo, resultados de exámenes médicos, factores hereditarios, comorbilidades, etc,) que tienen los pacientes que tienen cáncer, en comparación con los que no tienen cáncer. Una vez se aprende esas características se podría tomar las caracerísticas de un nuevo paciente y predecir si tiene o no cáncer o quizás asignarle una probablilidad de tenerlo. Este, que es un problema típico de análisis supervisados puede formalizarse así. Sea $\{(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}$ una muestra de n datos observados de, por ejemplo, n pacientes. Para cada paciente i observamos sus características o atributos x_i, posiblemente un vector m-dimensional con componentes continuas y/o categóricas, y observamos $y \in \{0, 1\}$ una variable dicótoma que es la que queremos explicar en función de los atributos (i.e., no tener o tener cáncer). El problema de aprendizaje consiste en construir una función, $f : X \to Y$ donde X es el espacio en donde estan las caracerísticas ($x_i \in X$) y $Y = \{0, 1\}$ de tal forma que se satisfaga algún criterio de optimalidad. Por ejemplo en el caso en discusión es común utilizar como criterio de optimalidad el error de clasificiación. Más precisamente sea $L : Y \times Y \to \{0, 1\}$ la función de pérdida estándar donde $L(y, \hat{y}) = 0$ si $y = \hat{y}$ y uno en caso contrario. Entonces el problema de construir una función, $f : X \to Y$ se puede plantear como:

$$\min_f \sum_{i=1}^{n} L(f(x_i), y_i) \tag{4.43}$$

Evidentemente, sin restricciones adicionales este problema tiene una solución trivial en la que $f(x_i) = y_i$ y en los $x \neq x_i$, f toma cualquier valor. Sin embargo, esta solución es probablemente muy poco útil para clasificar ejemplos nuevos al haberse sobreajustado a la muestra de entrenamiento. Una forma de reducir ese sobreajuste en el entrenamiento es restringiendo el conjunto de funciones candidatas a resolver el problema. Es decir, imponiendo más estructura sobre la funciones. Por ejemplo, f puede ser simplemente una función linea de y contra x (i.e., $f(x) = \beta_0 + \beta \cdot x$) o funciones complejas altamente no lineales como las redes neuronales. En cualquier caso la idea es restringir la familia de funciones a un conjunto $f(x, \theta)$ parametrizado por un parámetro θ. A continuación planteamos un problema de aprendizaje que se puede interpretar como un juego de suma cero. En este, básicamente aplica la teoría que hemos desarrollado anteriormente para juegos de suma cero (extendiendo la teoría al caso de conjuntos de acciones continuos).

Sea p_{datos} la verdadera distribución de los datos en un espacio x (i.e., distribución del ingreso de los colombianos). Sea p_g la distribución de un generador de datos en el espacio X (i.e., se generan datos del ingreso de los colombianos a partir de unas encuestas o usando un modelo generador como una red neuronal que requiere. Considere como generador de los datos en x un red neuronal G que toma valores z de un espacio Z, $z \in Z$ y genera valores x (los valores z se generan con una distribución conveniente p_z). Finalmente sea D una función de aprendizaje (discriminador) que toma x y arroja la probabilidad $D(x)$ de que los datos vengan de p_{datos} (i.e., $1-D(x)$ es la probabilidad de que sean generados por p_g). Ahora la idea es entrenar el discriminador D para maximizar la probabilidad de asignar la marca correcta de los ejemplos x y minimizar la posibilidad de que marcar de forma equivocada ejemplos del generador G como verdaderos:

$$\max_D \ \mathbb{E}_{x\sim p_{\text{data}}(x)}[\log D(x)] + \mathbb{E}_{z\sim p_z(z)}[\log(1-D(G(z)))]$$

Simútaneamente, se entrena el generador G para minimizar que los ejemplos generados por G sean detectados por D:

$$\min_G \ \mathbb{E}_{z\sim p_z(z)}[\log(1-D(G(z)))]$$

que es equivalente a:

$$\min_G \ \mathbb{E}_{x\sim p_{\text{data}}(x)}[\log D(x)] + \mathbb{E}_{z\sim p_z(z)}[\log(1-D(G(z)))]$$

Esto sugiere que G y D pueden interpretarse como las acciones de dos jugadores (el generador y el discriminador respectivamente) en un juego de suma cero con función de pagos pago para el jugador D:

$$V(D,G) = \mathbb{E}_{x\sim p_{\text{data}}(x)}[\log D(x)] + \mathbb{E}_{z\sim p_z(z)}[\log(1-D(G(z)))]$$

Por lo tanto el problema se puede plantear como:

$$\max_D \min_G V(D,G) = \min_G \max_D V(D,G)$$

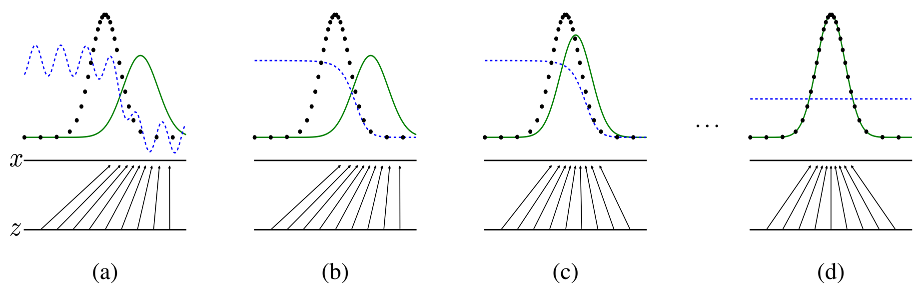
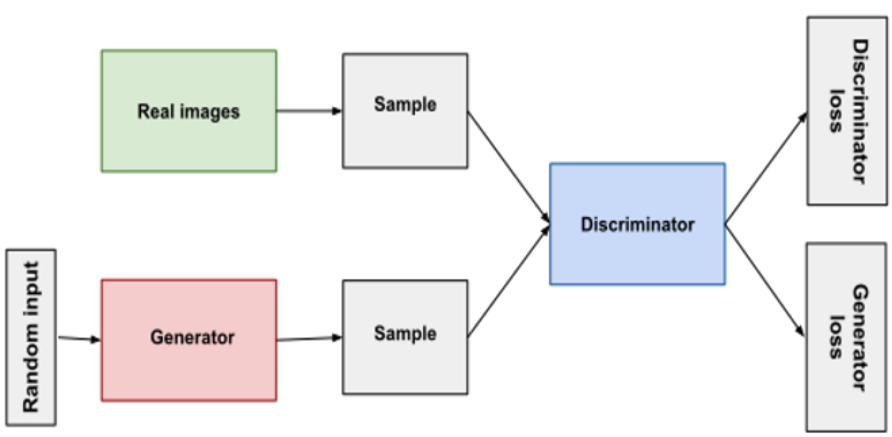


Figure 1: Generative adversarial nets are trained by simultaneously updating the **d**iscriminative distribution (D, blue, dashed line) so that it discriminates between samples from the data generating distribution (black, dotted line) $p_{\boldsymbol{x}}$ from those of the **g**enerative distribution p_g (G) (green, solid line). The lower horizontal line is the domain from which $\boldsymbol{z}$ is sampled, in this case uniformly. The horizontal line above is part of the domain of $\boldsymbol{x}$. The upward arrows show how the mapping $\boldsymbol{x} = G(\boldsymbol{z})$ imposes the non-uniform distribution p_g on transformed samples. G contracts in regions of high density and expands in regions of low density of p_g. (a) Consider an adversarial pair near convergence: p_g is similar to p_{data} and D is a partially accurate classifier. (b) In the inner loop of the algorithm D is trained to discriminate samples from data, converging to $D^*(\boldsymbol{x}) = \frac{p_{\text{data}}(\boldsymbol{x})}{p_{\text{data}}(\boldsymbol{x})+p_g(\boldsymbol{x})}$. (c) After an update to G, gradient of D has guided $G(\boldsymbol{z})$ to flow to regions that are more likely to be classified as data. (d) After several steps of training, if G and D have enough capacity, they will reach a point at which both cannot improve because $p_g = p_{\text{data}}$. The discriminator is unable to differentiate between the two distributions, i.e. $D(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}$.



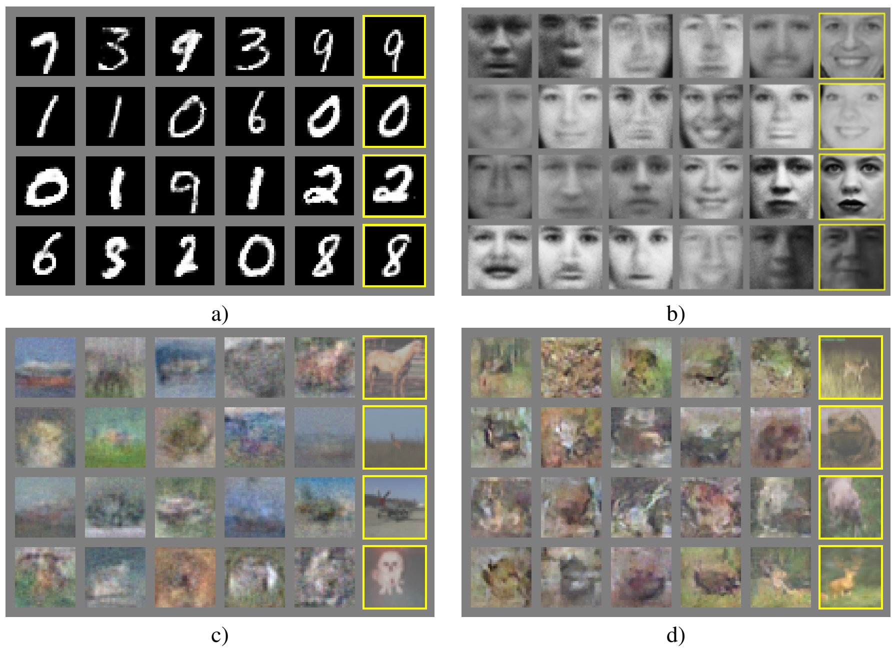


Figure 2: Visualization of samples from the model. Rightmost column shows the nearest training example of the neighboring sample, in order to demonstrate that the model has not memorized the training set. Samples are fair random draws, not cherry-picked. Unlike most other visualizations of deep generative models, these images show actual samples from the model distributions, not conditional means given samples of hidden units. Moreover, these samples are uncorrelated because the sampling process does not depend on Markov chain mixing. a) MNIST b) TFD c) CIFAR-10 (fully connected model) d) CIFAR-10 (convolutional discriminator and "deconvolutional" generator)

Ejercicios

1. Considere una industria con N firmas simétricas que produce un bien homogéneo. El costo de producción es $C = cq+F$ donde q es la cantidad producida, c el costo marginal y F un costo fijo. La demanda agregada esta caracterizada por $p = 1-Q$ donde p es el precio y Q es la demanda agregada.

   a) Plantear el problema de competencia a la Cournot.
   Cada firma $i \epsilon \{1, ..., N\}$ soluciona el siguiente problema de maximización:

   $$\max_{q_i \epsilon \mathbb{R}_+} \pi_i = Pq_i - cq_i - F$$

   Es decir, cada firma i elige una cantidad (q_i) no negativa que maximiza su función de beneficios.

   b) Calcular el equilibrio de Nash simétrico, y la cantidad agregada y el precio en equilibrio.

   Se reemplaza la demanda $P = 1 - Q = 1 - \sum_{i=1}^{N} q_i$ en la función de beneficios de la firma i, $\pi_i = Pq - cq_i - F$:

   $$\pi_i = \left(1 - \sum_{i=1}^{N} q_i\right) q_i - cq_i - F$$

   Se deriva esta expresión respecto a q_i y se iguala a 0 para hallar una función de reacción de la firma i a cualquier cantidad (estrategia) conjunta q_{-i}:

   $$\begin{aligned} \frac{d\pi_i}{dq_i} &= 1 - \sum_{i=1}^{N} q_i - q_i - c = 0 \\ q_i &= \frac{1 - c - \sum_{j \neq i} q_j}{2} \end{aligned}$$

   Dado que se pregunta por el equilibrio simétrico, se supone que todas las firmas actúan de igual forma, por lo que $q_i = q_j = q$:

$$\begin{aligned} q &= \frac{1-c-q(N-1)}{2} \\ Nq+2q-q &= 1-c \\ q &= \frac{1-c}{N+1} \end{aligned}$$

Note que para que $q\epsilon\mathbb{R}_{+}$ y para que el costo marginal sea no negativo, se necesita que $c\epsilon\left[0,1\right]$. Bajo este equilibrio simétrico se tiene que la cantidad agregada es:

$$Q = \frac{N\left(1-c\right)}{N+1}$$

y el precio de equilibrio es:

$$\begin{aligned} P &= 1-\frac{N}{N+1}\left(1-c\right) \\ P &= \frac{1+cN}{1+N} \end{aligned}$$

c) Mostrar que cuando el número de firmas N aumenta, el precio de equilibrio disminuye y la cantidad producida aumenta. Esto implica que el excedente del consumidor aumenta con el número de firmas.

Para ver esto note que, dado que $c\epsilon\left[0,1\right]$:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dN} &= \frac{c(1+N)-(1+cN)}{(1+N)^2} \\ \frac{dP}{dN} &= \frac{(c-1)}{(1+N)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dN} &= (1-c)\,\frac{1+N-N}{(1+N)^2} \\ \frac{dQ}{dN} &= \frac{(1-c)}{(1+N)^2} \geq 0 \end{aligned}$$

d) Calcular el beneficio de las firmas y el beneficio agregado de todas las firmas.

Se reemplaza el precio ($P = \frac{1+cN}{1+N}$) y la cantidad $\left(q = \frac{1-c}{N+1}\right)$ de equilibrio en la función de beneficios de la firma i, $\pi_i = Pq_i - cq_i - F$:

$$\begin{aligned}
\pi_i &= \left(\frac{1+cN}{N+1}\right)\left(\frac{1-c}{N+1}\right) - c\left(\frac{1-c}{N+1}\right) - F \\
\pi_i &= \left(\frac{1-c}{N+1}\right)\left[\left(\frac{1+cN}{N+1}\right) - c\right] - F \\
\pi_i &= \left(\frac{1-c}{N+1}\right)\left(\frac{1+cN-cN-c}{N+1}\right) - F \\
\pi_i &= \left(\frac{1-c}{N+1}\right)^2 - F
\end{aligned}$$

El beneficio agregado de todas las firmas está dado por:

$$\sum_{i=1}^{N}\pi_i = N\left(\frac{1-c}{N+1}\right)^2 - NF$$

e) Mostrar que el beneficio agregado de las firmas es decreciente en el número de firmas.

Para ver esto note que, dado que $N \epsilon \mathbb{N}$:

$$\frac{d\left(\sum\limits_{i=1}^{N}\pi_i\right)}{dN} = (1-c)^2\left(\frac{(1-N)}{(N+1)^3}\right) - F < 0$$

f) ¿Qué mensaje nos deja este modelo sobre una política que busca maximizar el número de firmas en una industria?

Este modelo sugiere que en un mercado en el que las firmas compiten a través de cantidades, adoptar una política que busca maximizar el número de firmas de una industria resulta beneficioso para los consumidores. Lo anterior debido a que un incremento en el número de firmas resulta en una caída de los precios y en un aumento de la cantidad, por lo que incrementará el excedente del consumidor. Sin embargo, el costo de asumir este tipo de política es que la mejora en los consumidores se da a expensas de los beneficios de las empresas, que a medida que enfrentan más competencia, pierden participación en el mercado.

2. Una aplicación de la teoría de juegos a la política económica (basado en Brams (2012)). Considere una situación en la que se desea construir una vía pública y se discute la contribución de los involucrados. Participa un individuo con un nivel de riqueza considerable (J1) y el resto del público con un nivel de riqueza común (J2) . Suponga que es de esperarse que ambas partes contribuyan para poder llevar a cabo la construcción de la vía pública, en ello cada parte tiene dos estrategias a seguir: contribuir (C) o no contribuir (NC). La utilidad asociada a cada posible estrategia conjunta se denota en la tabla.

1\2	C	NC
C	4,4	1,5
NC	5,1	2,2

En primer lugar, es de observar que dado que la estrategia NC domina estrictamente a C para ambos jugadores, estos tienen incentivos a no contribuir, puesto que de igual forma obtendrán beneficios mayores que si lo hicieran, independientemente de lo que haga el otro. A este concepto se le denomina "free-riders".

3. Juego del gallina (basado en Shubik (1984)). Dos pilotos de avión dirigen sus areonaves en la msima línea recta, uno en sentido sur-norte y otro en sentido norte-sur. En el momento en el que la colisión es inminente, si uno de los dos pilotos desvía el rumbo de su avión a la derecha o izquierda (D) entonces este es considerado como gallina y obtiene un pago menor al del otro piloto, en el caso en que ambos se desvían, ningunoo obtiene un pago y cuando ninguno se desvía (ND) la colisión genera un pago mucho menor a ambos jugadores. La matriz de pagos de esta situación es la siguiente:

1\2	ND	D
ND	-10,-10	5,-5
D	-5,5	0,0

Encuentre el equilibrio de Nash de este juego.

En este caso, los equilibrios de Nash en estrategias puras son $EN = \{(L,R),(R,L)\}$. Adicional al anterior equilibrio, existe otro en estrategias mixtas: $\sigma^* = (1/2, 1/2)$. Se puede apreciar que en cada equilibrio en estrategias puras, el pago de un jugador es negativo y el otro es positivo. En el equilibrio en estrategias mixtas el pago es negativo para ambos, y por lo tanto no es óptimo, pues ambos jugadores podrían coordinar y llegar a un pago estrictamente superior para ambos que se obtendría al jugar (D,D).

4. (Basado en Motta). Supongamos que n firmas compiten en un mercado para vender un bien homogéneo. Suponga que kn firmas son idémticas y tiene costos marginales (constantes) altos c_h y que $(1-k)n$ firmas son idénticas y tienen costos marginales (constantes) bajos c_l, $(c_h > c_l)$, donde $k \in (0,1)$. Sea H el conjunto de firmas con costos marginales altos y L el conjunto de firmas con costos marginales bajos. La oferta total Q se puede escribir como: $Q = \sum_{i \in L} q_i + \sum_{i \in H} q_i$ donde q_i son los niveles de producción de cada firma y supongamos que la función de demanda es $p = 1 - Q$.

   a) Escribir la función de beneficios de cada firma.

   b) Calcular el equilibrio de Nash simétrico (el mismo nivel de producción entre firmas del mismo tipo) cuando las firmas compiten a la Cournot.

   c) Mostrar que entre mayor sea el número de firmas más difícil es que las firmas con costos marginales altos produzcan cantidades positivas del bien.

   d) Cuál es su intepretación de estos resultados?

   e) Ahora suponga que las firmas con costos marginales altos no participan del mercado. Calcule el nuevo equilibrio.

5. Ese este equilibrio mejor o peor para los consumidores?

6. (Basado en Motta). Supongamos que J firmas identicas compiten en un mercado por un bien homogéneo.

   Vamos a suponer que los costos de las firmas son:

$$c(q^j) = cq^j + F \tag{4.44}$$

   donde $c \geq 0$ y q^j es el nivel de producción de la firma j y F es un costo fijo.

Supongamos que la demanda agregada inversa es lineal y la podemos escribir como:

$$p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J} q^j \tag{4.45}$$

donde a y b son positivos.

Por lo tanto, los beneficios de una firma j son:

$$\Pi^j(q^1, ...q^J) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J} q^j\right) q^j - cq^j - F. \tag{4.46}$$

a) Calcualr el equilibrio (simétrico) de Nash en Competencia a la Cournot.

b) Calcular los beneficios individuales en equilibrio de cada firma y los beneficios agregados.

c) Mostrar que los beneficios agregados de las firmas disminuyen con el número de firmas.

d) Cuál es su intepretación de este fenómeno.

7. El siguiente ejercicio es basado en Palacios-Huerta [2003]. El propósito del ejercicio es evaluar las implicaciones empíricas del concepto de equilibrio de Nash en un escenario real de un juego deportivo. Específicamente, se considera el disparo de penaltis del fútbol como un juego bilateral de suma cero en el que pateador tiene dos alternativas: dispara a la derecha del portero (D) o dispara a la izquierda del portero (I). Por simplicidad, los disparos al centro se consideran disparos a la derecha del portero. A su vez el portero tiene dos alternativas, se laza a la derecha (D) o se lanza a la izquierda. Los pagos de los jugadores son la frecuencia empírica con la que se alcanza el objetivo para el pateador y el portero. Usando datos de 1417 penaltis del periodo 1995 - 2000 principalmente de la ligas de España., Italia e Inglaterra. El autor reporta las siguientes probabilidades de marcar un gol (i.e., pago de cada estrategia para el pateador):

Pateador\ Portero	I	D
I	58.30	94.97
D	92.91	69.92

a) Mostrar que este juego tiene solo un equilibrio de Nash que es en estrategias mixtas.

b) Compare estas estrategias mixtas con las frecuencias empíricas que se observan de la elección de cada acción. Para el portero $(42,31\,\%, 57{,}69\,\%)$ y pare el pateador $(39,98\,\%, 60{,}02\,\%)$. ¿Son estos resultados consistentes con la afirmación que en el fútbol profesional los jugadores juegan un equilibrio de Nash?

Referencias

Brams, S. J. (2012). Game theory and the humanities : bridging two worlds. Cambridge, Massachusetts : MIT Press, 2012.

Shubik, M. (1984). Game theory in the social sciences : concepts and solutions. Cambridge, MA ; London : MIT Press, 1984.

Ignacio Palacios-Huerta, Professionals Play Minimax, The Review of Economic Studies, Volume 70, Issue 2, April 2003, Pages 395–415, https://doi.org/10.1111/1467-937X.00249

Capítulo 5

Juegos dinámicos de información perfecta

5.1. Conceptos básicos

Muchas situaciones en las que se presentan interacciones entre varios agentes tienen una forma interactiva. Esta dinámica puede ser explícitamente modelada y de esta forma enriquecer el análisis estático que hemos estudiado hasta el momento. La característica fundamental de estas situaciones estratégicas e interactivas es que a lo largo de la interacción entre los agentes se revela información total o parcial sobre las acciones de los demás que puede ser usadas para revisar las estrategias individuales.

Definición 5.1. Un juego en forma extensiva de información perfecta es una estructura de la forma:

$$\Gamma = (N, K, R, Z, \{K_i\}_{i=1,...,n}, \{A(k)\}_{k \in K \setminus Z}, \{u_i\}_{i=1,...,n})$$

donde:

1. N es un conjunto de jugadores, $N = \{1, ...n\}$.[1]
2. K es un conjunto finito que representa los nodos de un árbol.
3. R es una relación sobre K que define un árbol.

[1] En ocasiones adicionamos un jugador no estratégico que denotamos por cero y que representa la naturaleza.

4. Z son los nodos terminales del árbol.

5. $\{K_i\}_{i=1,\ldots,n}$ es una partición de $K \backslash Z$ que denota los nodos donde cada jugador juega.

6. Para $i = 1, ..., n$ y $k \in K_i$, $A(k)$ denota las acciones posibles del jugador i en el nodo k. Denotamos un elemento de $a \in A(k)$ por a_k.

7. Para $i = 1, ..., n$ y $z \in Z$, $u_i(z)$ denota la utilidad del agente i en caso de que el resultado final del juego sea el nodo terminal z. Cuando la estructura del árbol la determina algún evento aleatorio (jugadas de la naturaleza), interpretamos estas funciones de utilidad como funciones de utilidad esperadas.

Definición 5.2. Sea $A_i = \underset{k \in K_i}{\cup} A(k)$. Una estrategia pura s_i para el jugador $i = 1, ..., n$ en un juego en forma extensiva Γ es una función $s_i : K_i \longrightarrow A_i$ tal que para todo $k \in K_i$, $s_i(k) \in A(k)$.

Dada una estrategia conjunta $(s_i)_{i=1,\ldots n}$, esta induce un camino único a lo largo del árbol comenzando en la raíz y terminando en algún nodo $z = \zeta(s) \in Z$. En ocasiones utilizaremos la notación $(s_1, ..., s_n)$ para denotar la estrategia conjunta $(s_i)_{i=1,\ldots n}$.

Todo juego en forma extensiva se puede representar de dos formas como juegos estáticos: forma normal y forma multiagentes o de Selten.

Definición 5.3 (Forma normal)**.** Para $i = 1, ..., n$, sea $S_i = \{s_i : K_i \longrightarrow A_i | s_i(k) \in A(k)\}$, $s \in S = \prod_{i=0}^{N} S_i$ y definimos $\zeta(s) \in Z$ como el nodo final correspondiente al único camino que sobre el árbol que define la estrategia conjunta s. Para $i = 1, ..., n$ definimos $\pi_i(s_1, ..., s_n) = u_i(\zeta(s_1, ..., s_n))$. El juego $G = (\{1, ..., n\}, \{S_i\}_{i=1,\ldots,n}, \{\pi_i\}_{i=1,\ldots,n})$ se llama la representación normal del juego en forma extensiva.

Es fácil ver que un juego en forma normal puede ser la representación normal de juegos distintos en forma extensiva. De otra parte, existe otra forma de representar en forma estática un juego en forma extensiva. La representación multiagente de Selten informalmente supone la existencia de varios agentes de un jugador, uno en cada nodo donde el jugador juega, que actúan de forma independiente y toman decisiones en nombre del jugador que representan.

Definición 5.4 (Forma multiagente o de Selten)**.** Sea $N^* = \underset{i \in N}{\cup} \{i\} \times K_i$ el conjunto de jugadores. Un jugador es una pareja (i, k_i) donde $i \in N$ y $k_i \in$

K_i. Por simplicidad, y mientras no haya riesgo de confusión, denotaremos el agente (i, k_i) por k_i. Para cada jugador k_i, sea $S^*_{k_i} = A(k_i)$ su conjunto de estrategias. Una estrategia conjunta es $s \in S^*$ donde $S^* = \prod_{k_i \in N^*} S^*_{k_i}$ y escribimos $s = (s_{k_i})_{k_i \in N^*}$. Cada estrategia conjunta tiene asociado un nodo terminal $z \in Z$ que denotamos por $z = \zeta^*(s_{k_i})_{k_i \in K_i, i \in N}$.
Para cada jugador k_i definimos

$$\pi^*_{k_i}((s_{k_i})_{k_i \in N^*}) = u_i(\zeta^*((s_{k_i})_{k_i \in N^*})).$$

El juego $G^* = (N^*, \left(S^*_{k_i}\right)_{k_i \in N^*}, (\pi^*_{k_i})_{k_i \in N^*})$ se llama la representación de Selten o multiagente del juego en forma extensiva.

Ejemplo 5.5. Considere el siguiente juego en forma extensiva (figura 5.1).

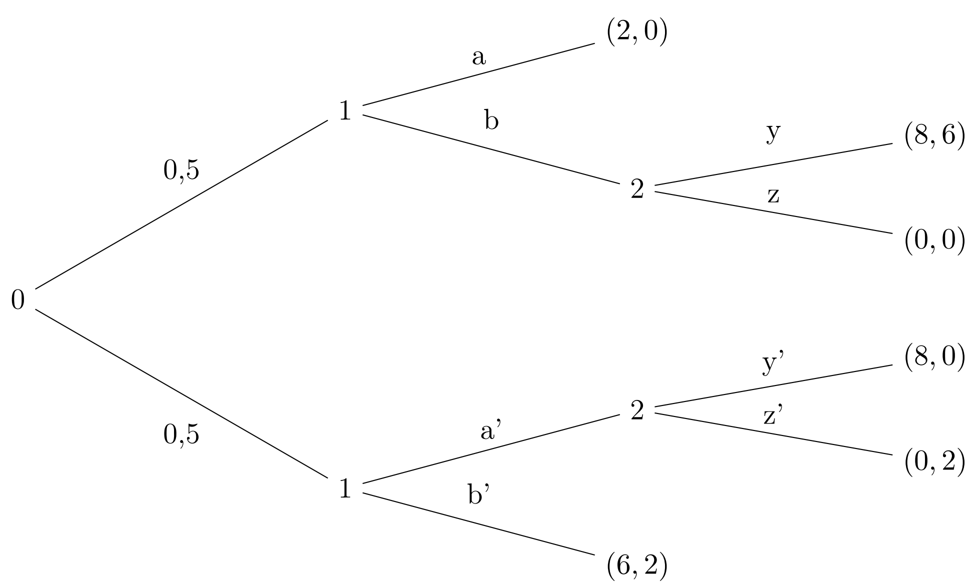


Figura 5.1: Forma extensiva.

La forma normal de este juego es:

1\2	yy'	yz'	zy'	zz'
aa'	5,0	1,2	5,0	1,1
ab'	4,1	4,1	4,1	4,1
ba'	8,3	4,4	4,0	0,1
bb'	7,4	7,4	3,1	3,1

y la multiagente es, en forma extensiva:

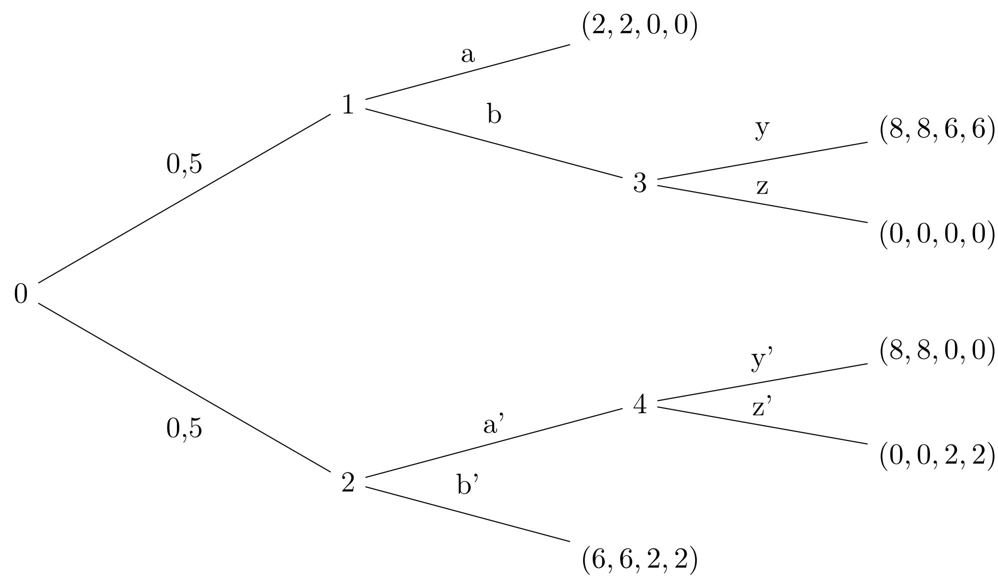


Figura 5.2: Forma extensiva de la representación multiagente.

Todo juego en forma extensiva puede representarse como un juego en forma normal. Luego, una primera aproximación al problema de describir sitemáticamente el resultado de un juego dinámico es analizar su forma normal. Sin embargo, esto no explota la naturaleza dinámica del problema. El siguiente ejemplo (entrada de una firma) pone de manifiesto la debilidad del análisis en forma normal y llama la atención sobre la necesidad de desarrollar conceptos de equilibrio que exploten explícitamente el proceso de revelación de información o la dinámica del problema.

Ejemplo 5.6 (Entrada de una firma)**.** Considere el juego de la figura 5.3. Este juego tiene como representación normal:

1\2	F	C
N	0,2	0,2
E	-1,-1	1,1

El anterior ejemplo pone de manifiesto que hay cierto tipo de equilibrios en juegos dinámicos que no son creíbles. Concretamente, en el ejemplo anterior el equilibrio (O, F) lo sustenta una amenaza del jugador 2 que al jugador 1

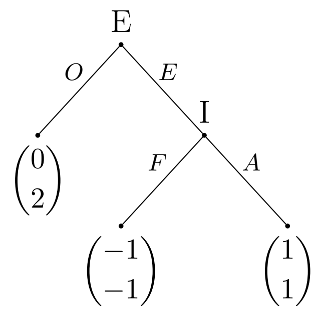


Figura 5.3: Entrada de una firma.

no tiene por qué parecerle creíble. Por eso decimos que este equilibrio no es creíble.

5.2. Inducción hacia atrás

Un concepto interesante en juegos de información perfecta, que busca eliminar estas amenazas no creíbles, es el de estrategia de inducción hacia atrás. Intuitivamente, esta racionaliza la idea de que un jugador escoge un plan que sea consistente temporalmente y cuando es la hora de ejecutarlo este no se arrepiente de lo previamente planeado.

Definición 5.7 (Inducción hacia atrás)**.** Decimos que la estrategia conjunta $\widehat{s} = (\widehat{s}_1, ..., \widehat{s}_N)$ es una estrategia de inducción hacia atrás en un juego de información perfecta si puede obtenerse de la siguiente forma:

1. Para cada nodo k tal que todo nodo sucesor de k sea terminal, si $k \in K_i$, entonces $\widehat{s}_i(k)$ maximiza el pago del agente i entre las posibilidades que tiene en ese nodo.

2. Convierta el nodo k en un nodo terminal donde los pagos son los que determina la estrategia $\widehat{s}_i(k)$.

3. Repita los pasos anteriores hasta llegar la raíz del árbol.

La definición anterior se extiende de forma natural al caso de estrategias mixtas.

Teorema 5.8 (Kuhn)**.** Si s es una estrategia de inducción hacia atrás en un juego de información perfecta, entonces s es un equilibrio de Nash - Cournot.

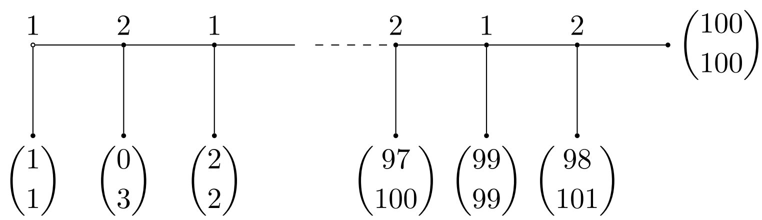


Figura 5.4: Juego del Cienpiés de Rosenthal

El converso de este teorema no es cierto. El ejemplo clásico es el problema de entrada de una firma. En este juego, el equilibrio de Nash - Cournot que no es creíble no es una estrategia de inducción hacia atrás.

Las estrategias de inducción hacia atrás en un juego de información perfecta son casos especiales del concepto de equilibrio perfecto en subjuegos que introduciremos en la siguiente sección.

Teorema 5.9 (Zermelo)**.** Todo juego de información perfecta tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras que se puede construir mediante inducción hacia atrás. Más aún, si ningun jugador es indiferente entre dos nodos terminales (a lo largo del proceso de inducción hacia atrás), solo hay un equilibrio de Nash que es una estrategia de inducción hacia atrás.[2]

Prueba. El teorema es una consecuencia inmediata del teorema de Kuhn. ■

Ejercicio 5.10. Demuestre que las estrategias de inducción hacia atrás no son necesariamente únicas.

El concepto de inducción hacia atrás tiene como consecuencia resultados inesperados y altamente ineficientes. Considere el juego del cienpies de Rosenthal (1981) (figura 5.4).

Ejercicio 5.11. Escriba el juego del Cienpiés como un juego en forma normal.

[2]Este es el teorema que Mas Colell et.al llaman teorema de Zermelo. Sin embargo, este no es históricamente el teorema Zermelo (1913). Una forma más cercana al teorema incialmente probado por Zermelo es el teorema que afirma que el ajedrez es un juego determinado (véase más abajo la definición de juego determinado). El teorema original de Zermelo se considera el primer teorema importante en teoría de juegos. Para una discusión detallada de la contribución de Zermelo a la teoría de juegos véase Schwalbe, U. y P. Walker (1999). Zermelo and the Early History of Game Theory.

Ejercicio 5.12. Considere el siguiente juego en forma extensiva (figura 5.5). Calcule la estrategia de inducción hacia atrás. Escriba el juego en forma normal y calcule sus equilibrios de Nash y el equilibrio perfecto (en forma normal del juego). Obsérvese que el equilibrio perfecto no es una estrategia de inducción hacia atrás (esto contrasta con el concepto de equilibrio perfecto para juegos en forma extensiva que introduciremos más adelante).

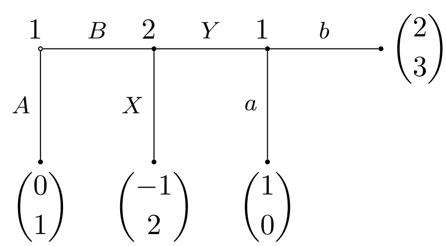


Figura 5.5: Equilibrio perfecto en forma normal que no es de inducción hacia atrás

Ejercicio 5.13 (Vega Redondo pag. 112, basado en van Damme)**.** Considere el siguiente juego en forma extensiva (figura 5.6). Muestre que $((A, D), b)$, $((B, D), a)$ y $((B, C), a)$ son equilibrios de Nash. En los dos primeros, D no es una amenza creíble. Obsérvese que en el único equilibrio creíble el pago es inferior para ambos jugadores comparado con $((A, D), b)$.

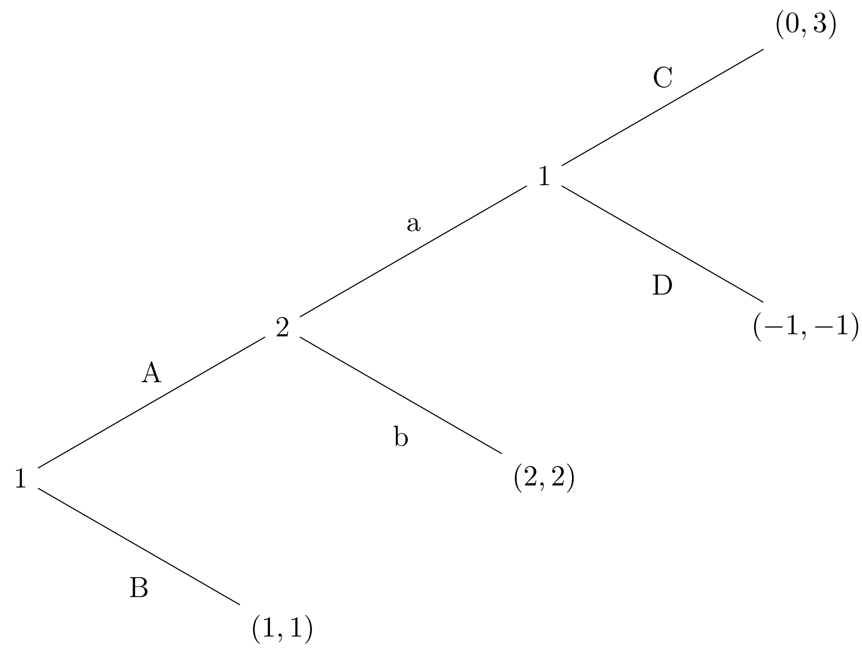


Figura 5.6: Juego de forma extensiva con equilibrios "no creíbles".

5.3. Juegos bilaterales de suma cero

El teorema de Zermelo junto con el teorema de von Neumann de juegos de suma cero tiene implicaciones fuertes sobre los juegos de información perfecta de suma cero.

Teorema 5.14. Todo juego bilateral de información perfecta y suma cero tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras (por inducción hacia atrás) que a su vez son estrategias maxmin para cada jugador (por el teorema de von Neumann).

Ejemplo 5.15 (El juego de ajedrez)**.** Por el anterior teorema, existe una estrategia para alguno de los jugadores tal que no importa que haga el otro jugador a lo largo del juego ésta garantiza que el jugador siempre gana o, como mínimo, empata. El problema fundamental es que no se conoce si las blancas o las negras pueden forzar un empate o una victoria. La limitación sin embargo no es teórica sino de tipo computacional. En efecto, supongamos que en un tablero jugado se sabe que las blancas pueden ganar con certeza independientemente de lo que el otro haga (esto puede ser un nodo final del juego, con el menor número de fichas posibles y un jaque mate como última jugada). Según el teorema de Zermelo, basta con hacer inducción hacia atrás y obtendríamos de esa forma un estrategia para las blancas que fuerzan una victoria. El problema con esta estrategia es que el número de jugadas admisibles en el ajedrez ha sido estimado en alrededor de $10^{20} - 10^{43}$ jugadas. Estos son números comparables al número de moléculas en el universo y cualquier búsqueda de estrategias óptimas en un espacio de esta dimensión es en la actualidad computacionalmente imposible. Esta observación llama la atención sobre la importancia de distinguir el concepto de racionalidad entre uno puramente conceptual y uno de tipo computacional. Este último concepto sirve como fundamento de la idea de racionalidad limitada y es el centro de estudio de un área nueva y muy fructífera de la teoría de juegos conocida como teoría de algorítmica de juegos.

Ejercicio 5.16. Este es un ejercicio para los que conocen un poco lógica matemática y es una prueba alternativa de las afirmaciones hechas en el ejemplo anterior sobre el juego del ajedrez. Escriba una sentencia en el lenguaje de primer orden que represente que las blancas tienen una estrategia ganadora independientemente de la estrategia de las negras. Muestre que la negación de esta sentencia afirma que las negras tienen una estrategia que garantiza por lo menos un empate. Luego, como esta sentencia o su negación debe ser verdad, esto prueba que en el ajedrez alguno de los jugadores tiene una estrategia que es siempre ganadora o que garantiza al menos un empate.

Un caso particular de juegos de suma cero son los juegos donde las utilidades posibles de cada jugador están en el conjunto $\{-1, 1\}$. Llamaremos a estos juegos "juegos totales de suma cero". Al jugador con pago 1 lo llamaremos el ganador, al otro, el perdedor.

Definición 5.17. Para juegos totales de suma cero, decimos que el juego es determinado si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora independientemente de lo que el otro haga (i.e., una estrategia estrictamente dominante).

El teorema anterior implica que todo juego de información perfecta, total de suma cero, es determinado.

Lo importante de este teorema es que al asegurar que el equilibrio de Nash es también una solución maxmin del juego, esto implica que esas estrategias puras aseguran como mínimo el valor del juego para cada jugador independientemente de lo que el otro haga. Además, no existen incentivos unilaterales a desviarse. A continuación discutimos algunas consecuencias de la afirmación anterior para algunos juegos conocidos.

Ejemplo 5.18 (Juego de Gale)**.** . Considere el siguiente juego. Dado una figura con $n \times m$ cuadrados (n filas y m columnas) el juego consiste en retirar de forma iterativa (primero un jugador, después el otro, y así sucesivamente) pedazos como se muestra en la figura 5.7. En cada jugada es obligatorio retirar por lo menos un cuadrado. El perdedor es el jugador que está obligado e retirar el último cuadrado.

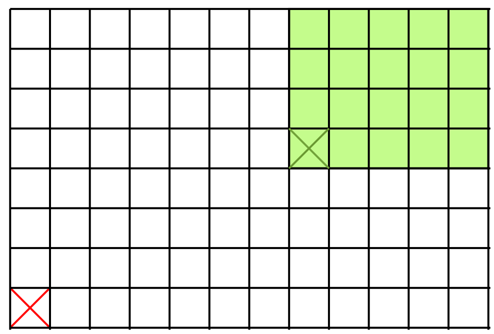


Figura 5.7: Juego de Gale.

Ahora considere tres casos:

1. $n \times n$. El primer jugador tiene una estrategia ganadora. La estrategia ganadora es $(2, 2)$.

2. $n \times m$. El primer jugador tiene una estrategia ganadora. Suponga que el jugador 2 tiene una estrategia ganadora y suponga que el jugador 1 en su primer movimiento elige el cuadrado en la posición (n, m). Entonces el jugador 2 tiene que tener una estrategia ganadora. Supongamos que esta estrategia es elegir el cuadrado (i, j). Ahora obsérvese que el jugador 1 hubiese podido elegir el cuadrado (i, j) como su primera jugada y en este caso el jugador 2 recibiría el tablero de juego igual a como lo está recibiendo el jugador 1. Luego el jugador 2 tendría que tener una estrategia ganadora. Por lo tanto el jugador 1 podría utilizar esta estrategia y ganar el juego, lo que contradice la hipótesis de que el juego es determinado en favor del jugador 2. Note que es importante en el argumento que la primera jugada sea elegir (n, m). Esto es lo que garantiza que cuando el segundo jugador elige (i, j) el juego que queda es idéntico a que si desde el principio el primer jugador hubiése elegido el cuadrado (i, j).

3. $n \times \infty$, y $\infty \times \infty$. En ambos casos el juego es determinado, y puede haber hasta dos estrategias ganadoras.

Ejemplo 5.19 (Juegos determinados)**.** Existen juegos en los que se sabe que uno de los jugadores tiene una estrategia ganadora independientemente de la estrategia del oponente (i.e., el juego es determinado, pero no se sabe en favor de quién).[3] Para ilustrar esto en un juego sencillo considere un polinomio $P(x_1, ..., x_L)$ en L variables $\{x_i\}_{i=1,..,L}$ donde cada x_i es un número entero no negativo. El siguiente es un juego aritmético asociado al polinomio $P(x_1, ..., x_L)$.[4] Existen dos jugadores que juegan alternándose. El jugador I comienza y escoge un entero no negativo x_1. Después el jugador II escoge un entero no negativo x_2, y así sucesivamente hasta que alguno de los dos jugadores le corresponde escoger el entero x_L. El objetivo del último jugador es hacer el polinomio $P(x_1, ..., x_L) = 0$. El objetivo del otro jugador es hacer este polinomio diferente de cero. Es muy fácil demostrar que en todo juego aritmético el jugador I o el jugador II tiene una estrategia ganadora independientemente de lo que el otro haga (i.e., todo juego aritmético es determinado).

Ahora, considere el siguiente juego definido por el polinomio $P(x_1, ..., x_5) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_3x_5 - 2x_3 - 2x_5 - 3$. En este caso, el primer jugador juega de último, y gana si logra que $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_3x_5 - 2x_3 - 2x_5 - 3 = 0$, pero ello se puede reescribir como $(x_1 + x_2)^2 + 1 = (x_3 + 2)(x_5 + 2)$, de donde es fácil ver que, dado que el jugador uno escoge x_3 y x_5 al final, el jugador dos tiene una estrategia ganadora si y solo si existen infinitos números primos de la forma $n^2 + 1$, un problema de la teoría de números no resuelto a la fecha.

Más interesante aún es el hecho de que existen juegos aritméticos en el que la estrategia ganadora no es efectivamente computable (no es decidible). Rabin (1957) ha dado un ejemplo basado en conjuntos simples. Jones (1981, 1982) muestra como se puede reinterpretar este juego como un juego aritmético.

Ejemplo 5.20 (Juegos determinados no decidibles)**.** Rabin (1957). Sean A y B dos jugadores y $W \subset \mathbb{N}^3$. Las reglas del juego son: En tres rondas, A y B escogen tres números naturales (A comienza, después B y después A). El resultado final es una tripla (a, b, c). Si $(a, b, c) \in W$ gana B. Este juego es determinado (inducción hacias atrás). ¡Existe W decidible tal que el juego es determinado en favor de B y B no puede calcular, con ningún computador incluso hipotético, su estrategia ganadora!

[3] Basado en Jones, J.P. 1982. Some undecidable determined games. International Journal of Game Theory. Vol 11. No. 2. Pag 63-70.

[4] Decimos que L es la longitud del juego.

Ejercicio 5.21. . El juego de adivinanzas del mentiroso (liar guessing game?) es un juego jugado entre dos jugadores, A y B. Las reglas del juego dependen de dos enteros positivos k y n conocidos para ambos jugadores.[5]

Al principio del juego, A escoge dos enteros x y N con $1 \leq x \leq N$. El jugador A mantiene x secreto, y le revela N honestamente al jugador B. El jugador B ahora intenta obtener información sobre x preguntándole al jugador A preguntas de la siguiente forma. Cada pregunta consiste de B especificando un conjunto arbitrario S de enteros positivos (posiblemente alguno especificado en alguna pregunta anterior), y preguntándole a A si x pertenece a S. El jugador B puede preguntar tantas preguntas como desee. Después de cada pregunta, el jugador A debe responder con sí o no, pero puede mentir de forma que satisfaga la siguiente restricción: entre cualesquiera $k+1$ respuestas consecutivas, al menos una respuesta debe ser verdadera.

Después de que B ha preguntado tantas preguntas como quiera, debe especificar un conjunto X de a lo más n enteros positivos. Si x pertenece a X, entonces B gana; de lo contrario, pierde.

Demuestre que:

- Si $n \geq 2^k$, entonces B puede garantizar una victoria.
- Para todos los k suficientemente grandes, existe un entero $n \geq 1{,}99^k$ tal que B no puede garantizar una victoria.

[5] Tomado de http://polymathprojects.org/.

Capítulo 6

Juegos dinámicos de información imperfecta

6.1. El modelo

En muchas circunstancias de interacción estratégica, los agentes no pueden observar lo que han jugado sus adversarios en el pasado. Esto motiva el siguiente modelo.

Definición 6.1. Un juego en forma extensiva de información (perfecta o imperfecta) es una estructura de la forma:

$$\Gamma = (N, K, R, Z, \{K_i\}_{i=1,\ldots,n}, \{H_i\}_{i=1,\ldots,n}, \{A(k)\}_{k \in K \setminus Z}, \{u_i\}_{i=1,\ldots,n})$$

donde:

1. N es un conjunto de jugadores, $N = \{1, ...n\}$.[1]

2. K es un conjunto finito que representa los nodos de un árbol.

3. R es una relación sobre K que define un árbol. Más precisamente R es un orden parical sobre K. Esto es R es irreflexiva: para ningun $k \in K$, kRk y es transitiva: para todo $k, k', k'' \in K$ si kRk' y $k'Rk''$ entonces kRk''. Un orden parcial induce para cada k, una noción de nodos

[1]En ocasiones adicionamos un jugador no estratégico que denotamos por cero y representa la naturaleza.

inmediatamente predecesores $P(k)$ y nodos inmediatamente sucesores $S(k)$. [2]

4. Z son los nodos terminales del árbol (i.e., nodos que para los cuales el conjunto de sucesores es vacío).

5. $\{K_i\}_{i=1,...,n}$ es una partición de $K\backslash Z$ que denota los nodos donde cada jugador juega.

6. Para $i = 1, ..., n$, H_i es una partición de K_i. Cada $h \in H_i$ denota un conjunto de información. Las particiones H_i son la estructura de información de los agentes en el juego.

7. Para $i = 1, ..., n$, y $k \in K_i$, $A(k)$ denota las acciones posibles del jugador i en el nodo k. Denotamos un elemento de $a \in A(k)$ por a_k.

   Dados k y $k' \in h \in H_i$ debe complirse que $A(k) = A(k')$. De esta forma el jugador no es capaz de distinguir, con base en las acciones factibles en un nodo, en cuál de los nodos del conjunto de información se encuentra. Luego, el conjunto de acciones factibles en un nodo lo podemos identificar como un conjunto de acciones factibles del conjunto de información que contiene al nodo. Abusando un poco del lenguaje, definimos $A(h) = A(k)$, $k \in h$ y denotamos una acción $a \in A(h)$ por a_h.

8. Para $i = 1, ..., n$, y $z \in Z$, $u_i(z)$ denota la utilidad del agente i en caso de que el resultado final del juego sea el nodo terminal z. Esto no excluye que existan pagos intermedios. Interpretamos estas funciones de utilidad como funciones de utilidad de von Neumann y Morgenstern.

Obsérvese que la única diferencia de fondo con la definición que dimos en el capítulo anterior es la introducción de una estructura de información $\{H_i\}_{i=1,...,n}$.

Definición 6.2. Sea $A_i = \underset{h \in H_i}{\cup} A(h)$. Una estrategia pura s_i para el jugador $i = 1, ..., n$ en un juego en forma extensiva Γ es una función $s_i : H_i \longrightarrow A_i$ tal que para todo $h \in H_i$, $s_i(h) \in A(h)$.

Dada una estrategia conjunta $(s_i)_{i=1,...n}$, esta induce un camino único a lo largo del árbol comenzando en la raíz y terminando en algún nodo $z =$

[2]Para ser un árbol es necesario que exista un nodo especial, digamos k_0 que sirve de raiz o nodo incial del árbol y tal que, dado cualquier otro nodo k, existe un único camino desde k_0 hasta k.

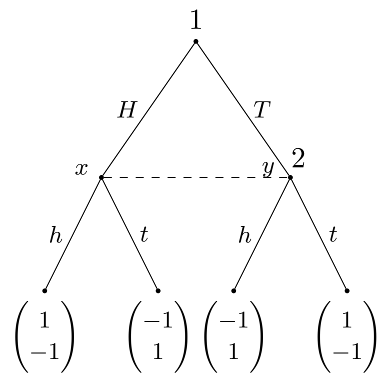


Figura 6.1: Cara y Sello. Juego en forma extensiva que, en formal normal, no tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras.

$\zeta(s) \in Z$. En ocasiones utilizaremos la notación $(s_1, ..., s_n)$ para denotar la estrategia conjunta $(s_i)_{i=1,...n}$.

Todo juego en forma extensiva se puede representar de dos formas como juegos estáticos: forma normal y forma multiagentes o de Selten.

Definición 6.3 (Forma normal)**.** Para $i = 1, ..., n$, sea $S_i = \{s_i : H_i \longrightarrow A_i \mid s_i(h) \in A(h)\}$, $s \in S = \prod_{i=0}^{n} S_i$ y definimos $\zeta(s) \in Z$ como el nodo final correspondiente al único camino que sobre el árbol define la estrategia conjunta s. Para $i = 1, ..., n$ definimos $\pi_i(s_1, ..., s_n) = u_i(\zeta(s_1, ..., s_n))$. El juego $G = (\{1, ..., n\}, \{S_i\}_{i=1,...,n}, \{\pi_i\}_{i=1,...,n})$ se llama la representación normal del juego en forma extensiva.

La representación multiagente de Selten es inmediata. En esta cada jugador tiene un representante en cada conjunto de información.

6.1.1. Extensiones mixtas

Una motivación para introducir estrategias mixtas en juegos en forma extensiva es observando que en algunos de estos juegos no necesariamente existe un equilibrio en estrategias puras. Por ejemplo, considere el juego de cara y sello en una representación en forma extensiva (figura 6.1).

Dadas las dos representaciones anteriores, forma normal o de Selten, existen dos formas naturales de definir estrategias mixtas.

Definición 6.4 (Estrategias mixtas y de comportamiento)**.** Una estrategia mixta en un juego en forma extensiva es una estrategia mixta del juego en su representación normal. Una estrategia de comportamiento en un juego en forma extensiva es una estrategia mixta del juego en su representación multiagente. Alternativamente, una estrategia de comportamiento para el jugador i es una función $\gamma_i : H_i \to \Delta(A_i)$ tal que para todo $h \in H_i$ el soporte de $\gamma_i(h)$ está contenido en $A(h)$[3].

Para ver que las dos definiciones de estrategias de comportamiento son equivalentes considere una estrategia de comportamiento en el sentido de Selten, $\sigma^*_{h_i}$, $h_i \in N^*$ donde $\sigma^*_{h_i}$ es un elemento de $\Delta(S^*_{h_i}) = \Delta(A(h_i))$. Ahora defina γ_i para el jugador i como $\gamma_i : H_i \to \Delta(A_i)$ donde $\gamma_i(h_i) = \sigma^*_{h_i}$. La función γ_i representa las estrategias de comportamiento en el sentido de la última definición. Un argumento muy similar muestra que toda estrategia de comportamiento γ_i define una estrategia de comportamiento en el sentido de Selten.

Para resaltar la diferencia entre los dos conceptos, estrategias mixtas y de comportamiento, estudiemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.5 (Estrategias mixtas como estrategias de comportamiento)**.** Considere el juego de la figura 6.2 y la estrategia mixta para el jugador 1, $0{,}5[AC]{+}0{,}5[BD]$. Una posibilidad para representar esta estrategia como una estrategia de comportamiento es simplemente asociándole a cada agente (que lo representa en sus conjuntos de información) la probabilidad marginal de las estrategias puras involucradas. Por ejemplo, un candidato natural para la estrategia de comportamiento del jugador 1 es: $(0{,}5[A] + 0,5[B], 0{,}5[C] + 0{,}5[D])$ donde la primera coordenada corresponde a la estrategia mixta en el primer conjunto de información del jugador 1 y la segunda al segundo conjunto de información. Sin embargo, esto no parece hacer mayor sentido, pues en la estrategia mixta original para escoger D es necesario escoger BD y en ese caso, el segundo agente del jugador 1 jamás jugaría y por lo tanto no escogería D en su estrategia de comportamiento.

Ahora, condicional a que le toca jugar al segundo agente del jugador 1, la probabiliad de escoger D es 1. Luego otra posible representación de la estrategia mixta como una estrategia de comportamiento es: $(0{,}5[A] + 0,5[B], [D])$.

Este ejemplo motiva la siguiente definición informal. Decimos que una estrategia pura $s_i \in S_i$ para el jugador i en la representación normal del juego

[3]El soporte de $\gamma_i(h)$ se define como el conjunto de acciones que tienen probabilidad positiva con la estrategia $\gamma_i(h)$

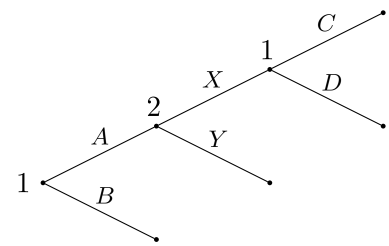


Figura 6.2: Estrategias mixtas y de comportamiento

es compatible con el conjunto de información $h_i \in H_i$ si existe un conjunto de estrategias s_{-i} para los demás jugadores tal que le estrategia conjunta $s = (s_i, s_{-i})$ implica *pasar* por h_i. Por ejemplo, considere el juego de la figura 6.2.

Las estrategias puras para el jugador 1, (B, C) y (B, D) son incompatibles con el segundo conjunto de información del jugador 1. Sea $h_i \in H_i$ y $\widehat{S}_i(h_i)$ las estrategias puras del jugador i que son compatibles con el conjunto de información h_i.

Dada una estrategia mixta σ_i del juego en formal normal, definimos la siguiente estrategia de comportamiento para el jugador i:

$$\gamma_i(h)(a) = \frac{\sum\limits_{\left\{s_i \in \widehat{S}_i(h_i): s_i(h_i) = a\right\}} \sigma_i(s_i)}{\sum\limits_{s_i \in \widehat{S}_i(h_i)} \sigma_i(s_i)} \quad \text{si} \sum_{s_i \in \widehat{S}_i(h_i)} \sigma_i(s_i) > 0$$

$$\gamma_i(h)(a) = \sum_{\left\{s_i \in \widehat{S}_i(h_i): s_i(h_i) = a\right\}} \sigma_i(s_i) \quad \text{si} \sum_{s_i \in \widehat{S}_i(h_i)} \sigma_i(s_i) = 0$$

Intuitivamente, $\gamma_i(h)(a)$ es la probabilidad según σ_i de la acción a condicional a pasar por el conjunto de información h. Cuando esta probabilidad de pasar con el conjunto de información h es cero, entonces definimos $\gamma_i(h)(a)$ como la probabilidad no condicional según σ_i de pasar por el conjunto de información h. El punto importante es que si la probabilidad de pasar por el conjunto de información h es cero, entonces la regla de Bayes no tiene ninguna implicación sobre la probabilidad en ese nodo y puede definirse de forma arbitraria.

Por ejemplo, en la figura anterior (6.2), considere la estrategia mixta para el jugador 1, $\sigma_1 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, donde el suponemos que cada coordenada del vector representa la probabilidad de elegir las estrategias puras $(A, C), (A, D), (B, C), (B, D)$ respectivamente. En este caso $\sum\limits_{s_1 \in \widehat{S}_1(h_1)} \sigma_1(s_1) = 0$ y por definición, si h_1 denota el conjunto de información del jugador 1 cuando debe decidir entre C y D, $\gamma_1(h_1)(D) = \frac{1}{2}$.

En general, más de una estrategia mixta puede inducir la misma estrategia de comportamiento.[4]

El hecho de que dos estrategias mixtas puedan inducir la misma estrategia de comportamiento puede tener consecuencias estrategicas importantes en cierto tipo de juegos[5].

En los juegos con memoria perfecta las estrategias mixtas y de comportamiento son estratégicamente equivalentes. Esto es, juegos en los que ningún jugador olvida sus acciones o información adquirida en el pasado. El teorema que establece la equivalencia estratégica entre estrategias mixtas y de comportamiento en juegos de memoria perfecta se debe a Kuhn (1953).

Definición 6.6 (Memoria Perfecta)**.** Un juego en forma extesiva es de memoria perfecta si ningún jugador olvida las acciones tomadas o la información que en el algún momento tuvo. Formalmente esto se puede expresar como:

1. No olvidar acciones: i no olvida $a \in A(k)$, $k \in K_i$, $k = P(k')$, $k = P(k''), k' \neq k''$, donde $P(x)$ denota el conjunto de los predecesores inmediatos de x, entonces todo par de nodos sucesores de k', k'' en los que i deba tomar una decisión están en conjuntos de información distintos.

2. No olvidar información pasada: i no olvida información pasada si para todo $h \in H_i$ $k, k' \in h$, si $\widehat{k} \in K_i$ es un predecesor de k entonces existe un $\hat{k}' \in K_i$ predecesor de k' tal que $\hat{k}$ y $\hat{k}'$ están en el mismo conjunto de información.

Las dificultades que se encuentran al analizar un juego de memoria imperfecta las ilustra el siguiente ejemplo de Piccione y Rubinstein (1997).

Ejemplo 6.7 (Piccione y Rubinstein)**.** Este es un juego de memoria imperfecta donde un agente puede estar tentado a cambiar de decisión a pesar de no haber recibido ninguna información adicional. Considere el siguiente juego:

Hay por lo menos dos formas de aproximarse a la solución de este juego. En la primera que la llamaremos la solución planeada la estrategia optima es

[4]Véase figura 1.10 página 20 de Vega Redondo.

[5]Véase figura 1.11 y 1.12 de Vega - Redondo.

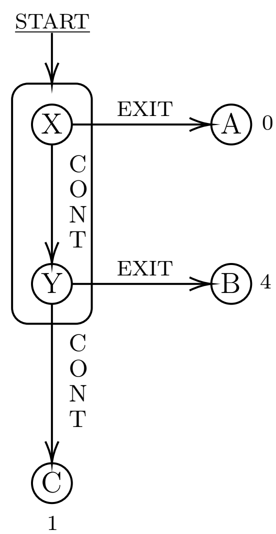


Figura 6.3: Juego de memoria imperfecta: El conductor ebrio I

resolver este problema:

$$\max_{p}(p^2 1 + p(1-p))4 + (1-p)0 \tag{6.1}$$

donde p es la probabilidad de que el conductor continúe. Es decir $p = \frac{2}{3}$.

Otra alternativa es definir una estrategia de acción (similar a una estrategia de comportamiento). Sin embargo, esta alternativa es, conceptualmente, cero trivial. El lector puede intentar definir una estrategia cuando el conductor llega a una intersección (no sabe cuál!) y entenderá el reto de hacerlo. El lector puede consultar en Internet las innumerables discusiones sobre el tema. En particular, este ejemplo esta basado en Robert J. Aumann, Sergiu Hart, and Motty Perry (1997).

De ahora en adelante vamos a considerar únicamente juegos de memoria perfecta.

En este capítulo vamos a utilizar frecuentemente el siguiente argumento. La definición de estructura de información es tal que los jugadores no saben en qué nodo están parados de su conjunto de información cuando deben jugar. Sin embargo, en ocasiones evaluamos situaciones contrafactuales en las que el jugador va tomar decisiones distintas dependiendo del nodo en el que le toca jugar. En ese sentido, cuando su mejor estrategia es potencialmente distinta entre los nodos de un conjunto de información, vamos a vernos en la necesidad de introducir un sistema de expectativas que el jugador pueda utilizar para hacer una conjetura sobre la probabilidad de estar en cada nodo.

6.2. Amenazas no creíbles

El concepto de estrategia de inducción hacia atrás no se generaliza de forma inmediata al caso de juegos de información imperfecta. La generalización requiere la introducción del concepto de subjuego.

Definición 6.8 (Subjuegos)**.** Un subjuego de un juego en forma extensiva es un juego tal que: (1) Comienza con un nodo que define un conjunto de información que tiene un solo nodo. (2) Contiene todos los nodos sucesores y solo éstos. (3) Si un nodo está en el subjuego entonces todo nodo en su conjunto de información también está (es decir, no hay conjuntos de información divididos por el subjuego).

Definición 6.9 (Equilibrio perfecto en subjuegos)**.** Una estrategia conjunta s es un equilibrio perfecto en subjuegos si *induce* un equilibrio de Nash - Cournot de todo subjuego.[6]

La anterior definición se extiende de forma natural al caso de estrategias de comportamiento.

Ejemplo 6.10. Figura 6.4. En este juego existen dos equilibrios de Nash en el único subjuego (propio): (L, l) y (R, r) y dos en subjuegos: $((O, L)), l)$ y $((I, R), r)$. Obsérvese que $((O, R), l)$ es un equilibrio de Nash pero no es un equilibrio perfecto en subjuegos (i.e., no es creíble: en caso de que el jugador 1 entre en el juego, el jugador 2 tendría un incentivo a aletorizar entre l y r).

Ejemplo 6.11. En el juego de la figura 6.5 vemos cómo el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos selecciona un único equilibrio de Nash de los tres equilibrios de Nash que existen (en la forma normal del juego). Obsérvese que uno de los equilibrios eliminados no es creíble (i.e, $((O, L), l)$ lo sustenta la amenza no creíble del jugador 2 de jugar l) y el otro es dominado (i.e, $((O, R), l)$ lo sustenta la amenza no creíble del jugador 1 de jugar R en caso

[6]Dada una estrategia de un juego, la estrategia inducida en un subjuego es la restricción de la estrategia al subjuego. Esta puede definir un camino que en el juego original nunca hubiera sido alcanzado al utilizar la estrategia original. Véanse los ejemplos de equilibrios perfectos en subjuegos.

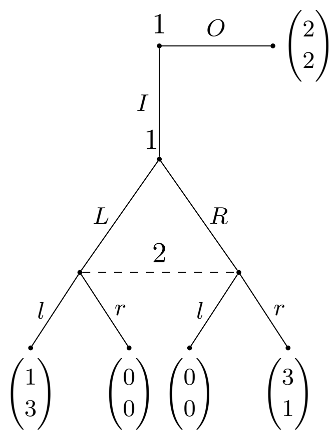


Figura 6.4: Equilibrios de Nash y Perfectos en Subjuegos I

de entrar; obsérvese que en caso de entrar, para el jugador 1, L domina estrictamente a R).

El concepto de equilibrio perfecto en subjuegos en un refinamiento estricto del concepto de equilibrio de Nash - Cournot y generaliza el concepto de inducción hacia atrás. El ejemplo clásico es el juego de entrada de una firma. Véase el juego de la figura 5 para el caso de juegos de información imperfecta.

Ahora, es interesante que el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos puede seleccionar un equilibrio que es dominado por otro equilibrio de Nash. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Ejemplo 6.12 (Ineficiencia del equilibrio perfecto en subjuegos)**.** En el siguiente juego, figura 6.6, la estrategia $((B, C), a)$ es el único equilibrio perfecto en subjuegos. Sin embargo, $((A, D), b)$ es un equilibrio de Nash que domina el equilibrio perfecto en subjuegos.

Teorema 6.13. En un juego información perfecta, el conjunto de estrategias de inducción hacias atrás coincide con los equilibrio perfectos en subjuegos.

El análogo del teorema de Nash para juegos de información imperfecta es el siguiente teorema de Selten.

Teorema 6.14 (Selten)**.** Todo juego finito en forma extensiva de memoria perfecta tiene un equilibrio perfecto en subjuegos (posiblemente en estrategias de comportamiento).

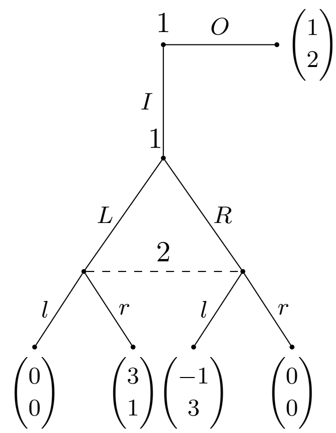


Figura 6.5: Equilibrios de Nash y Perfectos en Subjuegos II

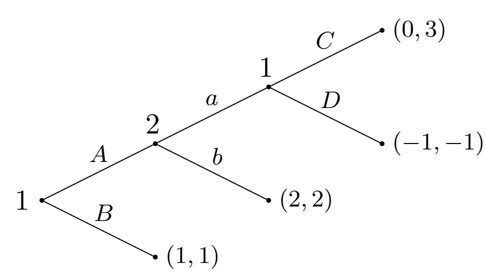


Figura 6.6: Ineficiencia del equilibrio perfecto en subjuegos

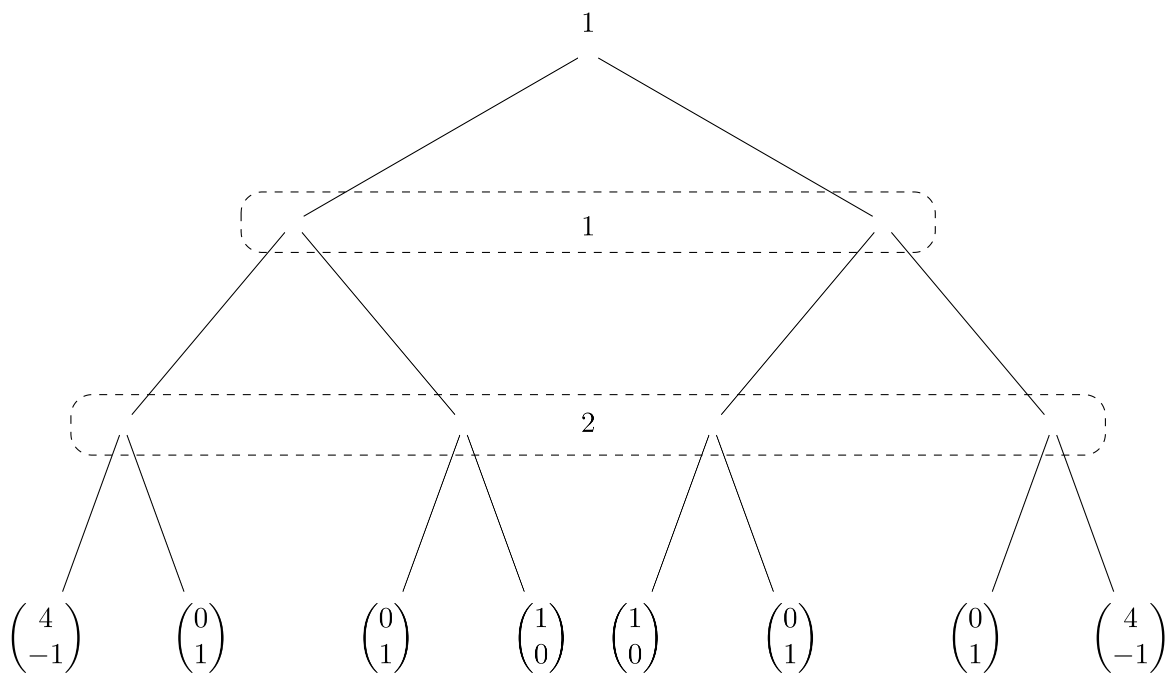


Figura 6.7: No existencia del equilibrio sin memoria perfecta.

Ejercicio 6.15 (Necesidad de memoria perfecta)**.** El siguiente juego ilustra la necesidad de la hipótesis de memoria perfecta en el teorema de Selten. Demuestre que el juego de la figura 6.7 no tiene un equilibrio en estrategias de comportamiento.

Si bien el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos llama la atención sobre la necesidad de enfocarse en estrategias conjuntas que sean óptimas dinámicamente (a lo largo de todos los subjuegos), desafortunadamente no logra eliminar todas las amenazas no creíbles. La razón es que este concepto no impone ninguna restricción sobre los caminos que no definen un subjuego. Los dos ejemplos siguientes ilustran el problema.

Ejemplo 6.16. El siguiente juego, figura 6.8, no tiene subjuegos propios. Los equilibrios de Nash (A, b) y (B, a) son equilibrios perfectos en subjuegos. Sin embargo, el primero no es creíble. En particular, no es creíble que el segundo jugador jugará b en caso de tener que jugar.

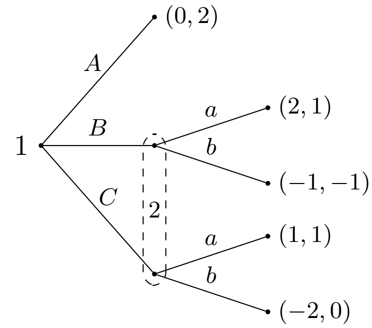


Figura 6.8: Equilibrio Perfecto en Subjuegos no creíble I

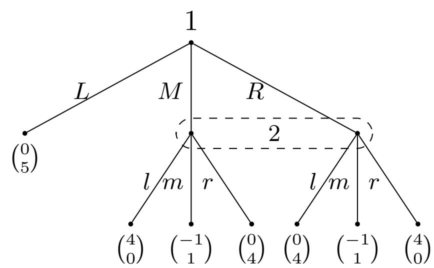


Figura 6.9: Equilibrio Perfecto en Subjuegos no creíble II

Ejemplo 6.17. El siguiente juego 6.9 tiene un equilibrio perfecto en subjuegos $((L, m))$ que no es creíble. Una vez el jugador 1 decide entrar, independientemente de si el jugador 2 cree estar en el nodo x o en el nodo y la estrategia mixta para 2, $(0{,}5,\ 0,\ 0{,}5)$ domina la estrategia m para el jugador 2.

Ejercicio 6.18. Muestre que en el juego de la figura 6.9 el único equilibrio en el que el jugador 2 juega m con probabilidad cero es cuando el jugador 1 juega L con probabilidad cero.

La necesidad de introducir un sistema de expectativas como parte integral de la evaluación que se hace de un juego la ilustra la siguiente modificación del juego de la figura 6.8. La figura 6.10 muestra que (A, b) es un equilibrio de Nash, pero que este sea o no sea creíble depende de con qué probabilidad cree el jugador que, en caso de que le toque jugar, lo hará en uno u otro nodo.

Este ejemplo sugiere que el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos

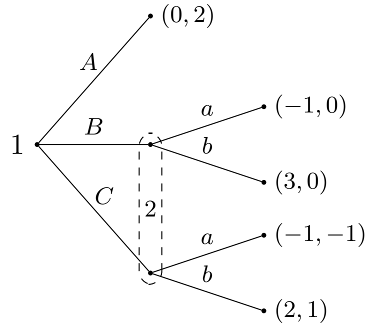


Figura 6.10: Necesidad de sistema de expectativas.

puede ser muy débil en ciertas ocasiones al no imponer ninguna restricción sobre las acciones de un juego en conjuntos de información que no definen un subjuego o sobre caminos que se encuentran por fuera del camino de equilibrio.

Ahora, en la próxima sección vamos a motivar la importancia de tener un modelo de aprendizaje a lo largo del luego. Es decir, una manera formal de ir incorporando nueva informaciónón en la medida que los jugadores van conociendo sobre las jugadas de sus adversarios. Antes de entrar en esos detalles, veamos un caso sencillo pero muy interesante.

Definamos el conjunto de todas las expectativas del agente i como $\Delta_i = \underset{h \in H_i}{\cup} \Delta(h)$ donde $\Delta(h)$ denota el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre el conjunto de información h.

Definición 6.19 (Sistema de expectativas)**.** Un sistema de expectativas de un juego es un conjunto funciones $\{p_i\}_{i=1,\ldots n}$, $p_i : H_i \to \Delta_i$ tal que $p_i(h) \in \Delta(h)$.

La interpretación es: $p_i(h)$ es la expectativa que tiene el jugador i de estar en cada uno de los nodos de su conjunto de información h.

Definición 6.20 (Estimación)**.** Una estimación del juego es $\left(\{p_i\}_{i=1,\ldots n}, \{b_i\}_{i=1,\ldots n}\right)$ donde $(p_i)_{i=1,\ldots n}$ es un sistema de expectativas y $(b_i)_{i=1,\ldots n}$ son estrategias de comportamiento.

Dada una estimación existe una forma natural de definir si las estrategias de comportamiento son óptimas dadas las expectativas de los jugadores (i.e., secuencialmente racionales).

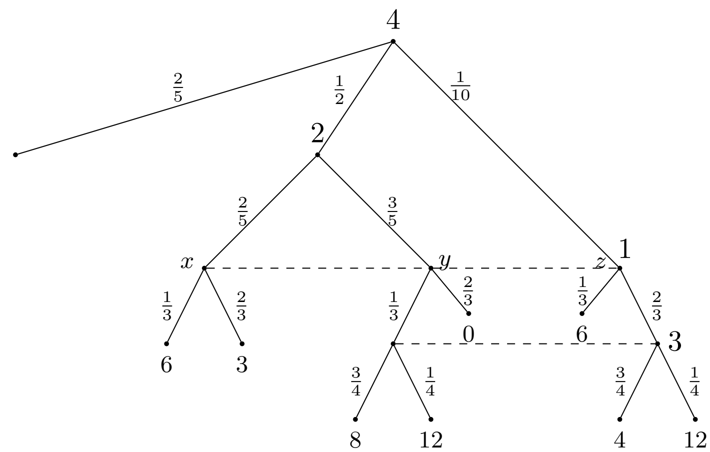


Figura 6.11: Cálculo de utilidad esperada en un conjunto de información

Fijemos una estimación del juego: $\left(\{p_i\}_{i=1,\ldots n}, \{b_i\}_{i=1,\ldots n}\right)$.

Sea $k \in K_i$ un nodo cualquiera. Definimos $u_i\,(b \shortmid k)$ como la utilidad del jugador i cuando suponemos que este se encuentra en el nodo k y las estrategias de comportamiento utilizadas por los jugadores son $\{b_i\}_{i=1,\ldots n}$.

Obsérvese que esta utilidad la podemos interpretar como una función: $u_i\,(b \shortmid \cdot) : K_i \to R$.

Definimos la utilidad del jugador i en el conjunto de información $h \in H_i$ cuando el perfil de estrategias de comportamiento es $\{b_i\}_{i=1,\ldots n}$ y las expectativas del jugador son $p_i\,(h) \in \Delta_i(h)$ como:

$$v_i(b \shortmid h) = E_{p_i(h)}\left[u_i\,(b \shortmid \cdot)\right].$$

Ejemplo 6.21. Calculemos $v_1(b \shortmid I)$ para el juego 6.11 (jugador 1, conjunto de información I como aparece en la figura): Analizamos separadamente los 3 subjuegos con raíz x, y y z (dejando de lado el hecho de que están en el mismo conjunto de información I). Es fácil ver que $u_1\,(b \shortmid x) = 4$, $u_1\,(b \shortmid y) = 3$ y $u_1\,(b \shortmid z) = 6$. Supongamos que las expectativas del jugador 1 son $p_x = \frac{1}{2}, p_y = \frac{1}{3}, p_z = \frac{1}{6}$. Luego, dadas las expectativas del jugador 1 en I obtenemos $v_1(b \shortmid I) = 4$.

Definición 6.22 (Racionalidad secuencial)**.** Una estimación de un juego $\left(\{p_i\}_{i=1,\ldots n}, \{b_i\}_{i=1,\ldots n}\right)$ es secuencialmente racional si para todo jugador i, conjunto de información $h \in H_i$ y estrategia de comportamiento b_i' del

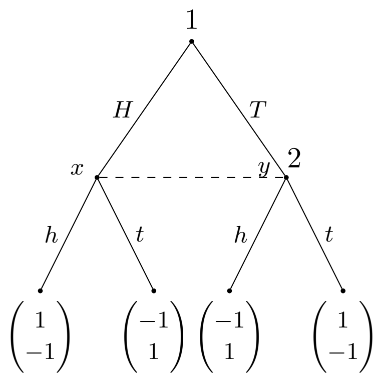


Figura 6.12: Cara y sello.

jugador i tenemos:

$$v_i(b_i, b_{-i} \mid h) \geq v_i(b_i', b_{-i} \mid h).$$

Intuitivamente, dada esa estimación del juego, ningún jugador tiene incentivos unilaterales a desviarse.

En la figura 6.9, el equilibrio prefecto en subjuegos que no es creíble no es racionalmente secuencial.

Desafortunadamente, una estimación secuencialmente racional no es necesariamente un equilibrio perfecto en subjuegos. Ni siquiera un equilibrio de Nash.

Ejemplo 6.23 (Racionalidad secuencial en el juego de cara y sello)**.** Considere el siguiente juego (Cara y sello): Figura 6.12 Este juego tiene un único equilibrio de Nash en estrategias de comportamiento: la estrategia mixta de jugar cara con probabilidad $\frac{1}{2}$. Sin embargo la estimación: $p_x = 0, p_y = 1$, $((1,0),(1,0))$ es secuencialmente racional pero no es un equilibrio de Nash.

6.3. Aprendizaje

En esta sección veremos la relevancia de definir un modelo de aprendizaje en ambientes inciertos. El paradigma de modelo de aprendizaje en teoría de la decisión es el regla de Bayes. El siguiente ejemplo llama la atención sobre las sutilezas de este concepto.

Ejemplo 6.24 (Paradoja del gato)**.** Una persona está frente a tres puertas cerradas. Se sabe que detrás de alguna de las puertas hay un gato y el objetivo de la persona es adivinar en qué puerta está el gato. La persona se le pide escoger una puerta. Después, una segunda persona que sabe donde está el gato y cuál fue la puerta elegida por la primera persona abre una de las puertas en la que no está el gato y que no haya sido la elegida por la primera persona. La primera persona puede observar que la puerta que fue abierta no tiene el gato y conoce la forma de actuar de la segunda persona. Ahora, se le pregunta a la primera persona si desearía cambiar de puerta.

El sentido común dice que no hace diferencia. Pero la teoría de la probabilidad dice otra cosa. La probabilidad de encontrar el gato en la puerta que permanece cerrada y que no es la elegida por la primera persona es mayor que la elegida inicialmente. Intuitivamente, cuando la persona elige una puerta la probabilidad de que el gato este en esa puerta es $\frac{1}{3}$. Esto sigue siendo cierto no importa lo que haga la segunda persona con las otras dos puertas (i.e., suponga que la segunda persona abre alguna de las otras dos puertas y no le revela la puerta abierta a la primera persona, en ese caso es evidente que la primera persona sigue creyendo que eligió la puerta en la que está el gato con probabilidad $\frac{1}{3}$). Ahora, ciertamente el gato está en esas otras dos puertas con probabilidad $\frac{2}{3}$. Al abrir una de esas dos puertas, la otra puerta, la que no eligió la primera persona pasa a tener probabilidad $\frac{2}{3}$ de tener el gato. En conclusión, cambiar de puerta para la primera persona aumenta su probabilidad de encontrar el gato de $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$.

Para formalizar este problema, supongamos que la primera elección fue la tercera puerta. Sean A_1, A_2 y A_3 los eventos en los cuales el gato está detrás de la puerta $1, 2$ o 3 respectivamente. Sean B_1 y B_2 los eventos en los cuales el segundo jugador abre la puerta 1 o 2 reespectivamente. Nuetro objetivo es calcular $P(A_i \mid B_j)$. Entonces, dada la información del problema es natural suponer:

$$P(A_i) = \frac{1}{3}, P(B_1|A_1) = P(B_2 \mid A_2) = 0$$

$$P(B_1 \mid A_2) = P(B_2 \mid A_1) = 1$$

y

$$P(B_1|A_3) = P(B_2|A_3) = \frac{1}{2}.$$

Entonces si la segunda persona abre la puerta 2 es fácil calcular, usando la regla de Bayes, $P\left(A_1 \mid B_2\right) = \frac{2}{3}$.

Ejercicio 6.25. Usando la regla de Bayes, demuestre que $P\left(A_1|B_2\right) = \frac{2}{3}$.

Vamos a introducir algunas restricciones de compatibilidad entre las expectativas y estrategias de comportamiento de los jugadores.

Definición 6.26 (Consistencia con regla de Bayes)**.** Una estimación de un juego $\left(\{p_i\}_{i=1,\ldots n}, \{b_i\}_{i=1,\ldots n}\right)$ es consistente con la regla de Bayes si, dadas las estrategias de comportamiento de todos los jugadores, la expectativa que tiene cada jugador de estar en un nodo específico es igual a la probabilidad de alcanzar ese nodo, condicional a que se alcanza el conjunto de información al que pertenece el nodo. Obsérvese que esto no impone ninguna restricción sobre las expectativas que puede tener un jugador de estar en un nodo particular cuando la probabilidad de llegar al conjunto de información que contiene ese nodo es cero.

Definición 6.27 (Equilibrio perfecto Bayesiano débil)**.** Una estimación de un juego es un equilibrio perfecto Bayesiano débil si es secuencialmente racional y si la estimación es consistente con la regla de Bayes.

Algunas observaciones:

- La estimación del juego de cara y sello del ejemplo anterior no es consistente con la regla de Bayes y, por lo tanto, no es un equilibrio perfecto Bayesiano débil.
- Todo equilibrio perfecto Bayesiano débil es un equilibrio de Nash (véase Mas Colell, proposición 9.C.1 página 285).
- Un equilibrio perfecto Bayesiano débil no tiene que ser necesariamente un equilibrio perfecto en subjuegos como lo demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.28 (Equilibrio perfecto Bayesiano débil que no es EPS)**.** En el juego de la figura 6.13, (B, X, D) es un equilibrio perfecto Bayesiano débil que lo sustenta la expectativa del jugador 3 de estar en el nodo superior de su conjunto de información con probabilidad 0. Sin embargo, este no es un equilibrio perfecto en subjuegos porque en el único subjuego propio, la estrategia inducida no es un equilibrio de Nash (el jugador 3 tiene incentivos unilaterales a desviarse).

Ejemplo 6.29 (Equilibrio perfecto Bayesiano débil con expectativas no creíbles)**.** En el juego de la figura 6.14, las estrategias (x, l) son un EPBD con la expectativa del jugador II de estar parado en el nodo de la izquierda con probabilidad 0,9. Sin embargo, esa expectativa no es creíble (i.e., sería más

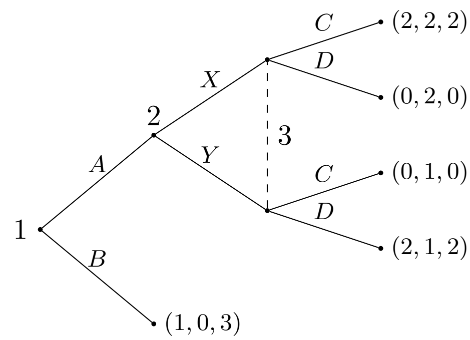


Figura 6.13: EPBD que no es EPS.

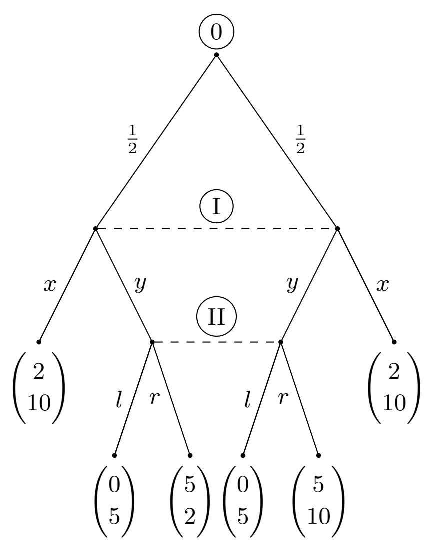


Figura 6.14: Equilibrio perfecto Bayesiano débil que no es creíble (Fuente: Ejemplo 9.C.4 de Mas Collel).

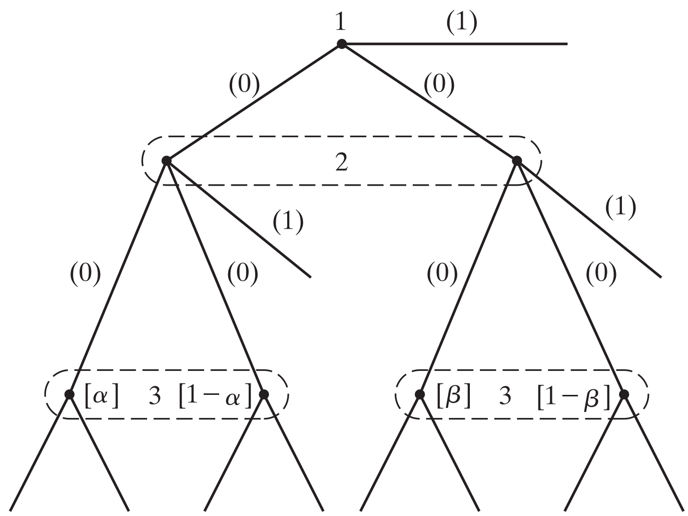


Figura 6.15: Condición de independencia.

natural que el jugador II le asignara probabilidad $\frac{1}{2}$ a cada uno de sus nodos).

Ejercicio 6.30. Encontrar un equilibrio creíble del anterior ejemplo.

Ejercicio 6.31. Hacer los ejemplos 9.C.1,9.C.2 y 9.C.3 de Mas Collel.

La consistencia con la regla de Bayes deja indeterminadas las expectativas en los conjuntos de información que no tiene una probabilidad positiva de ser alcanzados.

6.4. Expectativas no creíbles

Dos restricciones adicionales que ayudan a restringir el universo de expectativas son las siguientes.

Definición 6.32 (Independencia)**.** Las expectativas deben reflejar que los jugadores escogen sus estrategias de forma independiente.

La figura 6.15 muestra un juego en el que la restricción de independencia sobre la expectativas implica que $\alpha = \beta$.

Definición 6.33 (Simetría)**.** Jugadores con idéntica información deben tener las mismas expectativas.

La figura 6.16 muestra un juego en el que la restricción de independencia y simetría sobre la expectativas implica que $\alpha = \beta$.

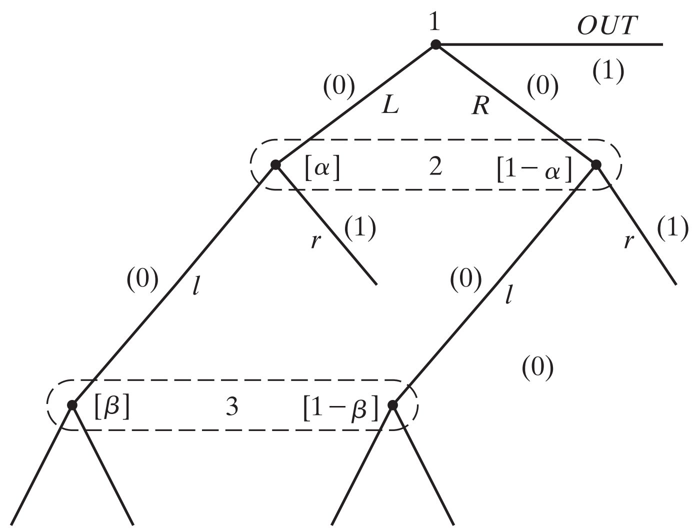


Figura 6.16: Condición de simetría.

Las hipótesis de consistencia con la regla de Bayes, independencia y simetría son *equivalentes* a que la evaluación de un juego sea consistente en el sentido de la siguiente definición. [7]

Definición 6.34 (Evauluaciones Consistentes)**.** Decimos que una evaluación de un juego $\left(\{p_i\}_{i=1,\ldots n}, \{b_i\}_{i=1,\ldots n}\right)$ es consistente si existe una sucesión de estrategias de comportamiento conjuntas $\{b_i^k\}_{k=1,\ldots}$ tal que:

1. Para todo k y para todo i, b_i^k es de soporte completo o completamente mixta (i.e., toda estrategia pura tiene probabilidad estrictamente positiva de ser elegida).

2. Para cada i, la sucesión $\{b_i^k\}_{k=1,\ldots}$ converge a b_i.

[7] Para más detalles véase Kohlberg y Reny [1997].

3. Para cada i, las expectativas que induce la sucesión $\{b_i^k\}_{k=1,...}$ de acuerdo a la regla de Bayes convergen a las expectativas p_i.

Definición 6.35 (Equilibrio Secuencial)**.** Una evaluación de un juego es un equilibrio secuencial si es consistente y secuencialmente racional.

Intuitivamente, en ningún momento del juego (aún en conjuntos de información con probabilidad cero de ser visitados) un jugador tiene incentivos unilaterales a desviarse.

Ejercicio 6.36. Dé un ejemplo de un equilibrio perfecto en subjuegos que sea secuencialmente racional, pero que no sea un equilibrio secuencial.

El análogo al teorema de Nash o al teorema de Selten es, para equilibrios secuenciales, el teorema de Kreps y Wilson.

Teorema 6.37 (Kreps y Wilson)**.** Todo juego en forma extensiva con memoria perfecta tiene un equilibrio secuencial (posiblemente en estrategias de comportamiento) y todo equilibrio secuencial es un equilibrio perfecto en subjuegos.

Ejemplo 6.38. Equilibrio perfecto Bayesiano débil que es perfecto en subjuegos pero no equilibrio secuencial. Considere el juego de la figura 6.17. Las estrategias (A, b, U) son un equilibrio perfecto débil Bayesiano siempre y cuando el jugador 3 crea que está en x_{31} con probabilidad superior a $\frac{2}{3}$. Este equilibrio no es creíble y no es un equilibrio secuencial. Soportar este equilibrio requeriría una sucesión de expectativas convergiendo a cero en el nodo x_{31}. En cambio, (B, b, V) es un equilibrio secuencial y es creíble.

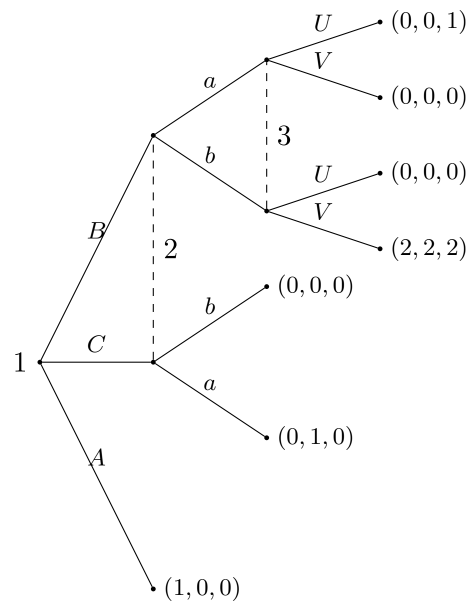


Figura 6.17: Equilibrio perfecto Bayesiano débil que es perfecto en subjuegos pero no equilibrio secuencial. Fuente: Figura 4.10 de Vega - Redondo.

Ejemplo 6.39. Equilibrio Secuencial puede no ser creíble. Considere el juego de la figura 6.18 abajo. Este juego tiene un equilibrio secuencial (A, b) que no es creíble.

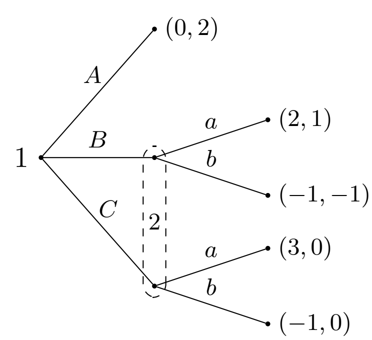


Figura 6.18: Equilibrio Secuencial que no es creíble.

Obsérvese que hasta este punto todos los argumentos para dudar sobre la credibilidad de un equilibrio que lo sustenta una estrategia no creíble, se basan esencialmente en un argumento de inducción hacia atrás. Intuitivamente, estamos asumiendo que los jugadores suponen que después de tomar sus acciones, los jugadores que toman acciones posteriores van ha tomar la mejor acción disponible (i.e., los jugadores se van a portar bien). Esto contrasta con la noción informal que introduciremos en el siguiente capítulo de inducción hacia adelante en la que, intuitivamente, suponemos que los cuando los jugadores planean tomar una acción, suponen que en el pasado los demás jugadores han tomado la mejor acción disponible (i.e., los jugadores se han portado bien).

Ejercicios

1. Este ejercicio es una continuación del ejemplo de la figura 4.10 de Vega - Redondo. Considere el juego de la figura abajo y las siguiente sucesión de estrategias de comportamiento para cada jugador.

   El jugador 1, tiene la sucesión de estrategias $\gamma_k^1 = (1-(1+\rho)\epsilon_k^1, \epsilon_k^1, \rho\epsilon_k^1)$ donde $k = 1, 2, ...$ y $\rho \in (0, 1)$ y ϵ_k^1 es cualquier sucesión de números reales positivos tal que $\epsilon_k^1 \to 0$.

   El jugador 2, tiene la sucesión de estrategias $\gamma_k^2 = (\epsilon_k^2, 1-\epsilon_k^2)$ donde $k = 1, 2, ...$ y ϵ_k^2 es cualquier sucesión de números reales positivos tal que $\epsilon_k^2 \to 0$.

   El jugador 3, tiene la sucesión de estrategias $\gamma_k^3 = (1-\epsilon_k^3, \epsilon_k^3)$ donde $k = 1, 2, ...$ y ϵ_k^3 es cualquier sucesión de números reales positivos tal que $\epsilon_k^3 \to 0$.

   a) Dada una estrategia comportamiento $(\gamma_k^1, \gamma_k^2, \gamma_k^2)$ tiene todos los conjuntos de información de todos los jugadores probabilidad positiva de ser visitados con estas estrategias de comportamiento?

   b) Mostrar que $(\gamma_k^1, \gamma_k^2, \gamma_k^2) \to (A, b, U)$

   c) Usar la regla de Bayes para mostrar que para cada k el único sistema de expectativas consisten con la regla de Bayes es para el jugador 2, $p_2(x) = \frac{1}{1+\rho}$, $p_2(y) = 1 - \frac{1}{1+\rho}$ y para 3, $p_3(\overline{x}) = \epsilon_k^2$, $p_3(\overline{y}) = 1 - \epsilon_k^2$.

   d) Muestre que las expectativas del numeral para el jugador 3 convergen a $p_3(\overline{x}) = 0$ y $p_3(\overline{y}) = 1$.

   e) ¿Es el resultado del ítem anterior consistente con las expectativas necesarias que debe tener el jugador 3 para que el equilibrio (A, b, U) sea un equilibrio perfecto Bayesiano débil?

f) ¿Cómo interpreta usted este ejercicio?

2. Considere el siguiente juego (Caballo de Selten), figura 6.19.

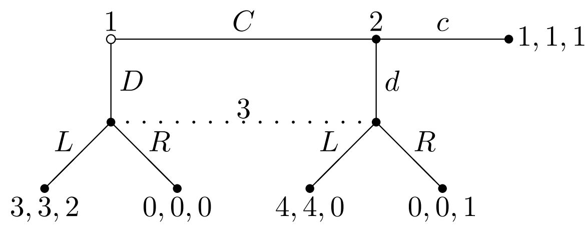


Figura 6.19: Caballo de Selten.

a) Calcular un equilibrio de Nash en estrategias puras que no sea secuencialmente racional.

b) Calcular un equilibrio secuencial.

Capítulo 7

Refinamientos de equilibrios dinámicos

En los capítulos anteriores avanzamos progresivamente hacia conceptos de equilibrio cada vez más restrictivos en las estrategias de equilibrio y expectativas que los soportan. En particular, usamos como guía primero el esfuerzo de eliminar amenazas de estrategias no creíbles. En este caso, principalmente tratamos de imponer restricciones en las estrategias de equilibrio en todos los subjuegos (EPS), aun aquellos que están por fuera de equilibrio. Esto generaliza y racionaliza la idea de inducción hacia atrás o, lo que es lo mismo, la consistencia temporal de las acciones que tomen los agentes desde el primer momento en el juego. Desafortunadamente, esta idea no impone restricciones en aquellos conjuntos de información que no definen un subjuego. Esto hizo necesario la introducción de sistemas de expectativas y diferentes formas de consistencia de estas con el perfil de estrategias de los jugadores que evitáran sostener equilibrios sobre la base de expectativas no creíbles. Es decir, ahora adicionalmente se imponen restricciones sobre las expectativas de los agentes aún en conjuntos de información que no se juegan en equilibrio (EPBD y ES). En resumen, todos estos casos podríamos decir que, intuitivamente, se basan en la idea de eliminar estrategias y expectativas no creíbles imponiendo restricciones sobre estas en y por fuera del equilibrio.

En este capitulo exploramos otras ideas complementarias: la idea de que los agentes interiorizan que pueden cometer errores, los agentes pueden estar enfocándose en diferentes equilibrios (inducción hacia adelante) o una en la que los jugadores consideran que sus estrategias son formas de enviar señales a sus oponentes. Comencemos con la idea de que los agentes son consientes que pueden cometer errores en el momento de jugar.

7.1. Equilibrio perfecto

La siguiente es una definición más fuerte de equilibrio que la definición de equilibrio secuencial.

Definición 7.1 (Equilibrio Prefecto)**.** Una evaluación de un juego $\{(p_i), (b_i)\}_{i=1,...n}$ es un equilibrio perfecto si:

1. La evaluación es consistente. Sea $\{(b_i^k, p_i^k)_{k=1,..}\}$ una sucesión de evaluaciones que satisface la condición de consistencia para $\{(p_i), (b_i)\}_{i=1,...n}$.
2. Para todo $i = 1, ..., n$, $h \in H_i$, estrategia de comportamiento b_i':

$$E_{p_i^k(h)} v_i(b_i, b_{-i} \mid h) \geq E_{p_i^k(h)} v_i(b_i', b_{-i}^k \mid h) \tag{7.1}$$

Ejemplo 7.2. Considere el juego de la figura 7.1 (este es el mismo juego del ejemplo 6.39). El equilibrio (A, b) es un equilibrio secuencial pero no es creíble y no es un equilibrio perfecto. En este caso un argumento de inducción hacia atrás en el sentido que los jugadores suponene que los demás se van ha portar bien a lo largo del juego sugiere que el equilibrio no es creíble (obsérvese que en caso de jugador 2 tener que jugar, a domina débilmente a b).

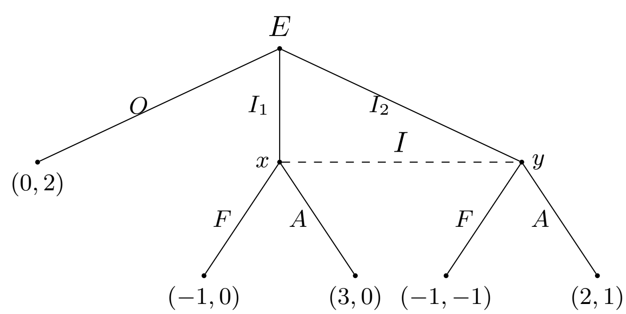


Figura 7.1: Equilibrio secuencial que no es creíble y no es perfecto.

Ejemplo 7.3. Considere el juego de la figura 7.2. En este juego $(F, b), (A, a)$ son Nash y EPS. Más aun $(A.a)$ es un equilibrio perfecto porque no depende de ningun comportamiento por fuera de equilibrio. Ahora (F, b) es un EPBD si $p_2(x)$ es aproximadamente 1 y (F, b) es un equilibrio perfecto (para ver esto, sea $b^k = ((1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}), (1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n})))$.

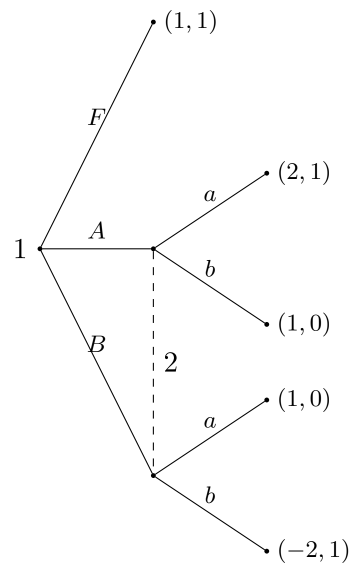


Figura 7.2: Equilibrio perfecto.

7.2. Inducción hacia adelante

El concepto de inducción hacia atrás formaliza la idea de limitar el comportamiento de los jugadores a la siguiente forma de comportamiento racional: usar estrategias que son óptimas cuando suponemos que los demás se *van* a comportar de forma óptima a lo largo del juego.

La idea de inducción hacia adelante capitaliza en una forma de racionalidad contraria: usar estrategias que son óptimas bajo el supuesto de que el adversario se *ha* comportado de forma óptima durante el juego.

Ejemplo 7.4. Considere el juego de la figura 7.3. No es difícil convencerse de que (O, F) es Nash, EPS y ES, pero no es perfecto. Este equilibrio no es creíble. Sin embargo, la credibilidad de este equilibrio no está basada en un argumento de inducción hacia atrás sino que es un poco más sutil. La credibilidad de este equilibrio puede ponerse en duda si apelamos al concepto de inducción hacia adelante: en caso de tener que jugar el jugador 2 supone que el jugador 1 se ha portado bien jugando I_2 y en ese caso el jugador 2 tiene incentivos a elegir A.

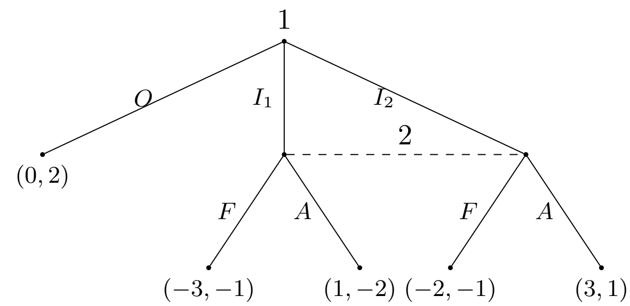


Figura 7.3: Equilibrio Secuencial que no es creíble y no es perfecto.

Ejercicio 7.5. ¿Qué tipo de equilibrio es (O, l)? ¿Es necesario un argumento de inducción hacia adelante para poner en duda la credibilidad del equilibrio?

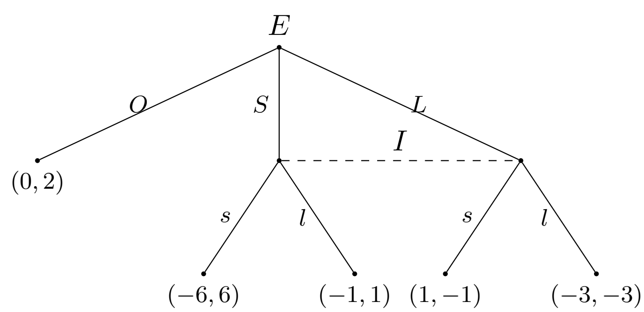


Figura 7.4: Equilibrio perfecto

La figura 7.5 es un ejemplo interesante de cómo utilizar inducción hacia adelante para determinar un equilibrio. Este juego es básicamente dos juegos de la batalla de los sexos. Si intepretamos los pagos como pesos, cuando el hombre elige jugar X es básicmanete como si quemara un peso de sus posibles pagos (de ahí su nombre en inglés *burning money*). Supongamos que el hombre juega X, entonces es de esperarse que después va jugar S. En caso contrario, si jugara B el pago máximo al que podrí aspirar es 1 resultado que es dominado por la estrategia (Y, S) para el hombre. La mujer entonces deduce que lo mejor para ella es jugar S si el hombre juega X.

Ahora, si el hombre juega Y, decide no quemar un peso, debe ser porque tiene una expectativa de ganar más que 2. Si el hombre supone que la mujer juega S él, juega S y consigue el pago de 3. En ambos casos, cuando el hombre juega (X, S) y (Y, S), si la mujer juega S la mujer es indiferente con el resultado final pero el hombre jugando (Y, S) recibe un pago de 3. En conclusión si el hombre supone que la mujer se ha portado bien después de él elegir Y, entonces el resultado final del juego será que el hombre juega (X, S) y la mujer S. Obsérvese que todo esto es consecuencia de permitir que, hipotéticamente, el hombre pueda quemar un peso de sus pagos en la batalla de los sexos (obérvese que el argumento presentado de inducción hacia adelante selecciona uno de los dos equilibrios de Nash en la batalla de los sexos, aquel que más favorece al hombre).

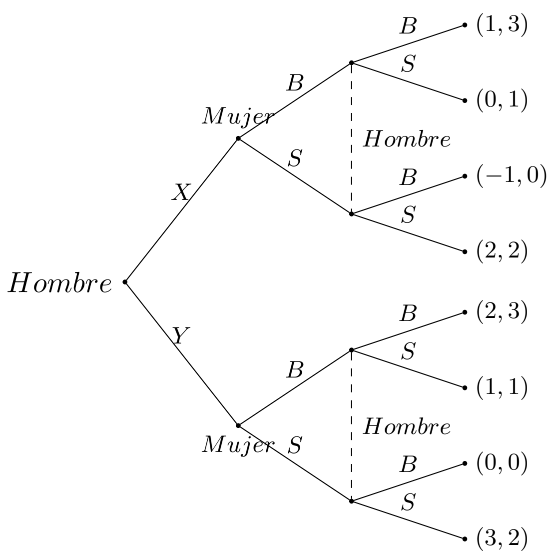


Figura 7.5: Efecto de la posibilidad de que un jugador queme parte de sus pagos.

Cuando usamos un argumento de inducción hacia adelante, usualmente nos preguntamos en cada momento del juego si las acciones de los adversarios han sido ópimas en el pasado.

Capítulo 8

Aplicaciones juegos dinámicos

En este capítulo vamos a estudiar algunas aplicaciones de juegos dinámicos a problemas de competencia imperfecta (i.e., oligopolio) y diseño de mecanismos. En la práctica, un resultado importante que vamos a obtener en el caso de competencia imperfecta es la equivalencia entre el problema de competencia a la Betrand con restricciones de capacidad en un juego con dos etapas (i.e., en la primera etapa las firmas eligen su capacidad de producción y en la segunda el precio de venta) y competencia a la Cournot en un juego estático. Este resultado de Kreps y Schienkamn racionaliza el uso del modelo de Cournot en muchas aplicaciones en donde en principio pareceria más natural el modelo de competencia en precios a la Bertrand.

8.1. Oligopolio: Stackelberg

Este es un juego en dos etapas en el cual una firma es líder y toma su decisión de producción. En la segunda etapa las demás firmas deciden sus niveles de producción. Consideremos el caso de dos firmas: $C_i(q_i) = cq_i$ y $P(Q) = max\{M - dQ, 0\}$, $M, d > 0$ y $Q = q_1 + q_2$. El espacio de estrategias de la firma líder es $S_1 = R_+$. El espacio de estrategias para la firma seguidora es el conjunto de todas las funciones de los reales no negativos en los reales no negativos (la estrategia de la firma seguidora es condicional a la cantidad producida por la firma líder). La forma de resolver este juego de información perfecta es hacer inducción hacias atrás. Primero encontramos la función de mejor respuesta de la firma seguidora ante cualquier estrategia de la firma líder. Segundo, calculamos la mejor estrategia de la firma líder cuando esta anticipa que la firma seguidora utilizará su mejor respuesta. En esta caso la solución es:

$$q_1 = \frac{M-c}{2d} \tag{8.1}$$

$$q_2 = \frac{M-c-dq_1}{2d} = \frac{M-c}{4d} \tag{8.2}$$

Si comparamos este equilibrio con el equilibrio simétrico en el caso de competencia a la Cournot, la firma líder produce más que en el caso de competencia a la Cournot y la firma seguidora, menos. La misma relación se mantiene para los beneficios agregados.

Ejercicio 8.1. Compare los resultados de este modelo de competencia de Stackelberg con los resultados de competencia monopolística, Cournot y Bentrand. En particular, muestre que en términos de excedente del consumidor el orden de menor a mayor excedente del consumidor es: monopolio, Cournot, Stackelberg y Bertrand. ¿Existen otros equilibrios del juego de Stackelberg que sean equilibrios de Nash? ¿Son estos creíbles? ¿Por qué la firma seguidora, a pesar de que cuenta con más información que en el caso de competencia a la Cournot, acaba en un equilibrio peor?

Ejercicio 8.2. Demuestre que si comparamos este equilibrio con el equilibrio simétrico en el caso de competencia a la Cournot, la firma líder tiene mayores beneficios relativo a dicho caso, y la firma seguidora, menos.

8.2. Delegación de la administración

En la práctica, la administración de una empresa u organización se delega y el problema se transforma en un problema de agencia: la interacción se da entre un principal, los dueños de la firma, y sus empleados o gerente de la misma. En este caso, la hipótesis de maximización de beneficios no es muy convincente. Considere el siguiente modelo.[1]

En una primera etapa los dueños de la firma eligen incentivos (α_i, f_i) El primero pondera la participación en los beneficios (antes del salario total del administrador) e ingresos y el segundo representa el sueldo básico. En la segunda etapa los administradores compiten a la Cournot. La función de demanda inversa es: $p(q) = 1 - q_1 - q_2$. El costo marginal es constante $c \in (0,1)$. Los beneficios de las firmas son: $\pi(q_1, q_2) = p(q)q_i - cq_i$. El pago para el administrador es:

[1] Tomado de Wolfstetter (2002). Topics in Microeconomics.

$$M_i(q_1, q_2) = \alpha_i \pi + (1 - \alpha_i) p(q) q_i + f_i. \tag{8.3}$$

y la restricción de participación es $M_i \geq m$, donde m es el salario de reserva. Cada administrador maximiza su ingreso sujeto a la restricción de participación.

Ahora, los dueños de la empresas deben fijar el contrato óptimo. Para resolver este problema vamos a usar el siguiente truco. Suponga que los dueños fijan el salario básico para que los administradores sean indiferentes respecto al salario de reserva. El beneficio de los dueños es:

$$\Pi_i - M_i = \Pi_i - m$$

donde hemos usado el truco mencionado anteriormente.

El problema de los dueños es optimizar sus beneficios escogiendo adecuadamente α_i. Obsérvese que al ser f_i un salario que no afecta el margen (es fijo) de los beneficios de los dueños, entonces se justifica haber utilizado el truco anterior.

Ejercicio 8.3. Demostrar que en equilibrio:

1. $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{6c-1}{5c}$
2. $f_1 = f_2 = m - \frac{4(1-c)^2}{25}$
3. $\pi_1 = \pi_2 = \frac{2(1-c)^2}{25} - m$
4. $M_1 = M_2 = m$

Ejercicio 8.4. Demostrar que en equilibrio:

1. Si $c > \frac{1}{6}$ entonces $\alpha_i \in (0, 1)$. Caso contrario $\alpha_i \leq 0$
2. Los beneficios en equilibrio son menores a los obtenidos si la firma maximizara los beneficios sin un administrador. Es decir, con administradores, no es un equilibrio maximizar los beneficios directamente (i.e., existiría un incentivo a desviarse y vender más).

8.3. Competencia con restricciones capacidad

Este modelo pone de manifiesto la relevancia del modelo de Cournot en la práctica. Si bien es cierto que rara vez vemos a las firmas competir en cantidades, sí es una mejor descripción de la realidad suponer que estas están sujetas a restricciones de capacidad y que compiten en precios a la Bertrand. El mensaje del siguiente modelo es que si las firmas en una primera etapa definen sus capacidades de producción y en una segunda etapa compiten en precios, el equilibrio es equivalente al equilibrio de Cournot (véase Vega-Redondo: El modelo de Kreps y Scheinkman).

8.4. Productos diferenciados

En secciones anteriores vimos que con productos homogéneos competencia a la Bertrand no permitía mayores oportunidades de hacer uso del poder de mercado en un oligopolio. Con restricciones de capacidad, como en el modelo de Kreps y Scheinkman, si puede suceder que las firmas utilicen su poder de mercado (i.e., el problema es equivalente a competencia a la Cournot). También vimos que, en un modelo sencillo con diferenciación exógena en los productos, entre menor sustitución exista en los bienes, más oportunidades tienen las firmas de ejercer su poder de mercado. En la siguiente aplicación extendemos el modelo espacial (Hotelling) a un contexto dinámico. Este puede ser interpretado como un modelo de competencia entre productos diferenciados en el que en la primera etapa los agentes escogen el grado de diferenciación del producto y en la segunda compiten en precios.

Considere dos firmas cuya posición (localización) del producto que ofrece en un espacio de características corresponde a su elección del producto. Los consumidores se ubican en ese espacio reflejando sus diferencias en preferencias por los productos ubicándose en el conjunto de características que más los satisfacen. En la medida que el consumidor compre un bien más apartado del punto donde se encuentra, esto le traerá una mayor desutilidad.

Supongamos que el espacio de carterísticas (i.e., calidad) es $[0,1]$. Existen dos firmas con costos marginales de producción $c > 0$ constantes. Los consumidores están distribuidos de forma uniforme en el espacio de características. La utilidad de consumir el producto de mayor preferencia es $\hat{u} > 0$ en unidades monetarias. La función de utilidad de un consumidor ubicado en $h \in [0,1]$ que desea consumir un producto de características $s_i \in [0,1]$ producido por la firma i con precio de venta p_i es:

$$\hat{u} - \nu(h - s_i)^2 - p_i \tag{8.4}$$

donde ν refleja el grado de desutilidad que le produce a un consumidor consumir una calidad distinta a su más preferida h.

Ejercicio 8.5. Por simplicidad y sin perdida de generalidad, supongamos que $s_1 < s_2$. Mostrar que si $\hat{u} > 3\nu + c$ entonces todos los consumidores compran un bien de algunas de las dos firmas en equilibrio.

El juego ahora es el siguiente. En la primera etapa las firmas eligen la calidad del producto s_1, s_2. En la segunda etapa, conscientes de la calidad de ambos productos, escogen sus precios.

Ejercicio 8.6. Demostrar que el EPS es: $s_1 = 0, s_2 = 1$ y que los precios de equilibrio son:

$$p_1(s_1, s_2) = p_2(s_1, s_2) = c + \nu$$

8.5. Diseño de mecanismos

Vamos a estudiar dos aplicaciones a la teoria de diseño de mecanismos: el mecanismo de compensación de Varian y el problema del Rey Salomón.

8.5.1. Un problema de externalidades

En muchas actividades económicas de producción las acciones de una firma afectan de forma directa los beneficios de las demás firmas que operan en ese u otros mercados. Este es un caso clásico de interacción estratégica entre agentes (i.e., externalidades) para el cual la teoría de juegos nos da una herramienta de análisis. Además, bajo estas condiciones sabemos que usualmente el resultado de la intereacción es ineficiente socialmente.

Existen por lo menos tres soluciones clásicas a este problema:

1. Coase: negociación privada en ausencia de costos de transacción y con derechos de propiedad bien definidos.

2. Arrow: crear un mercado para la externalidad (mercado de derechos de producción de la externalidad). El problema es que el mercado puede ser muy “delgado” (tener muy pocos participantes).

3. Pigou: supone que el regulador conoce las tecnologías y tributando y/o subsidiando, puede restablecer la eficiencia social.

En esta sección vamos a estudiar algunas de estas soluciones mientras dejamos otras como ejercicios. El mecanismo de compensación de Varian es un juego dinámico que complementa la solución de Coase suponiendo que los agentes están bien informados de los fundamentales económicos de los demás agentes, pero el regulador no conoce esta características.[2] Este es un ejemplo típico de diseño de mecanismos con información completa pues, si bien el regulador desconoce los fundamentales de las firmas, estas sí se conocen entre ellas. Este mecanismo de compensación implementa asignaciones eficientes como equilibrios perfectos en subjuegos en:

1. Ambientes económicos con externalidades.
2. Problemas de competencia imperfecta.
3. Juegos como el dilema de los prisioneros.

Para poner en perspectiva el mecanismo de Varian, primero vamos a discutir las soluciones de Coase y Pigou.

La solución de Coase

En un artículo muy importante en 1960 titulado *The Problem of Social Cost*, por el cual al autor le fue otrogado el premio Nobel de Economía en 1991, Ronald Coase expuso la siguiente idea. Él notó que en muchas ocasiones el problema de la ineficiencia que ocurría en casos como el que hemos expuesto anteriormente se debía a la falta de un mercado para la externalidad que mediara el efecto que tiene sobre los otros agentes la producción de cada uno. En el caso particular de esta sección, es claro que no existe un mercado para comprar o vender contaminación, razón por la cual, la firma 1 no internaliza la contaminación que produce en el río. De la misma forma, la firma 2 no tiene la posibilidad de comprar agua sin contaminar. Más notable aun fue observar que la razón por la cual no existía un mercado para este "bien", la contaminación, era la ausencia de derechos de propiedad bien definidos sobre él. Para ser más precisos, la ausencia de derechos de propiedad bien

[2]Varian [1994]: *A Solution to the Problem of Externalities when Agents are Well-Informed.* En efecto, usando juegos dinámicos es posible implementar una gran cantidad de funciones de elección social en equilibrios perfectos en subjuegos.

definidos se refiere al derecho o no a contaminar. En primer lugar, podríamos argumentar que la firma 2 tiene el derecho a un río sin contaminación. De la misma forma podríamos argumentar que la firma 1 tiene el derecho a contaminar. En cualquiera de los dos casos es claro que la definición y asignación precisa de cuál de las dos partes tiene los derechos sobre la contaminación es el primer paso en la creación de un mercado para el bien.

Por otro lado, la presencia de costos de transacción hace referencia a una forma muy precisa de estos costos. Específicamente, aquellos costos que impedirían una negociación privada creíble entre las partes con relación a un posibe intercambio del bien en cuestión. Supongamos que una vez definida la propiedad sobre el bien, los agentes pueden negociar un intercambio del bien y que la negociación no requiere de un agente externo que garantice el cumplimiento del contrato. Es decir, en ausencia de este costo de transacción que podría verse reflejado en la intervención del gobierno para garanatizar el cumplimiento o la contratación de abogados para precisar los contratos en caso de una eventualidad negativa para alguna de las partes, la contratación privada tendría el efecto de establecer un precio de negociación para el bien. En estas circunstancias podríamos decir que se han dado las dos condiciones más importantes para la creación de un mercado para el bien contaminación: propiedad del bien y precio. Sorprendentemente, Coase no solamente mostró que el problema radicaba en la falta de derechos de propiedad sino que demostró que, en ausencia de costos de transacción, es posible reestablecer la eficiencia social independientemente de a quién se le otorgue los derechos. Ésto es conoido como el teorema de Coase. Ilustraremos todas estas idea a través de un ejemplo.

Vamos a mostrar que en ambos casos es posible, mediante la negociaión privada entre las partes, reestablecer el óptimo social y que la solución no depende de a quién se le otorguen los derechos (una ilustración del teorema de Coase). Sin embargo, a quién se le otorgue los derechos y la forma de la negociación privada sí tiene consecuencias distribucionales.

Para comenzar, primero debemos caracterizar la solución centralizada (eficiente) y la solución descentralizada (ineficiente). La primera se puede caracterizar suponiendo que existe un planificador central que puede administrar ambas firmas y maximizar la suma de los beneficios de las firmas. Es decir, el planificador central resuelve el problema:

$$\max_{L_1,L_2} p_2F^2(L_1,L_2) - wL_2 + p_1F^1(L_1) - wL_1$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} p_1 \frac{\partial F^1(L_1)}{\partial L_1} + p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_1} &= w \\ p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_2} &= w \end{aligned}$$

Ejercicio 8.7 (Solución Eficiente)**.** Demostrar que la solución anterior es en efecto socialmente eficiente (en el sentido de Pareto).

Ahora consideremos el problema descentralizado. En este, cada firma elige la demanda de trabajo que maximice sus beneficios. Para la firma 1 el problema es: $\pi_1(L_2) = \max_{L_1} p_1 F^1(L_1, L_2) - wL_1$ y para la firma 2 es un problema similar: $\pi_2(L_1) = \max_{L_2} p_2 F^2(L_1, L_2) - wL_2$. Las condiciones de primer orden de este problema implican que la productividad marginal del trabajo de cada empresa es igual al salario correspondiente. Luego, comparando con la solución centralizada podemos ver que la solución descentralizada no es socialmente eficiente.

Con estos preliminares ahora estamos preparados para discutir la solución de Coase a este problema. Consideremos separadamente cada caso de asignación de derechos de propiedad.

Caso 1 (La segunda firma tiene derecho a un río sin contaminación)**.** Consideremos de nuevo el problema de la firma 2. Dada una demanda de trabajo L_1 por parte de la firma 1 el máximo beneficio posible de la firma 2 es:

$$\pi_2(L_1) = \max_{L_2} p_2 F^2(L_1, L_2) - wL_2$$

Si la firma 1 no operara entonces los beneficios de la firma 2 serían $\pi_2(0)$. Al operar a una escala L_1 la firma 1 perjudica a la firma 2 y el costos para esta ultima es: $\pi_2(0) - \pi_2(L_1)$. Ahora, dado L_1 sea $L_2 = h(L_1)$, la solución óptima al problema anterior. Entonces la función de beneficios de la firma se puede escribir como:

$$\pi_2(L_1) = p_2 F^2(L_1, h(L_1)) - wh(L_1)$$

Al ser responsable la firma 1 por la contaminación el río entonces ella debe compensar a la firma 2. La cantidad en la que debe compensarla es igual al perjuicio causado: $\pi_2(0) - \pi_2(L_1)$. Luego, siendo la firma 1 consiente de este costo adicional el probema que enfrenta es:

$$\max p_1 F^1(L_1) - wL_1 - (\pi_2(0) - \pi_2(L_1))$$

y la firma 2 resuelve:

$$\text{máx}\, p_2 F^2(L_1, L_2) - wL_2 + (\pi_2(0) - \pi_2(L_1))$$

Las condiciones de primer orden son, respectivamente,

$$\begin{aligned} p_1 \frac{\partial F^1(L_1)}{\partial L_1} + \frac{\partial \pi_2(L_1)}{\partial L_1} &= w \\ p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_2} &= w \end{aligned}$$

Ahora, como $\pi_2(L_1) = p_2 F^2(L_1, h(L_1)) - wh(L_1)$ entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_2(L_1)}{\partial L_1} &= p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_1} + \left(p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_2} - w \right) \frac{\partial h(L_1)}{\partial L_1} \\ &= p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_1} \end{aligned}$$

por las condiciones de primer orden de la firma 2. Luego, las condiciones de primer orden de las dos firmas se reducen a las condiciones de optimalidad social.

Caso 2 (La primera firma tiene derecho a contaminar el río)**.** En este caso, la firma 2 puede compensar a la firma 1 con el fin de que esta disminuya la contaminación del río. Supongamos que la firma 1, gracias a la compensación de la firma 2, disminuye su escala de operación a $L_1 < L_1^p$. Por lo tanto la firma 2 estaría dispesta a compensar a la firma 1 con $\pi_2(L_1) - \pi_2(L_1^p)$ ya que este sería el aumento en el beneficio de esta última. Luego, el problema que la firma 1 resuelve es:

$$\text{máx}\, p_1 F^1(L_1) - wL_1 + (\pi_2(L_1) - \pi_2(L_1^p))$$

y la firma 2 resuelve:

$$\text{máx}\, p_2 F^2(L_1, L_2) - wL_2 - (\pi_2(L_1) - \pi_2(L_1^p))$$

Las condiciones de primer orden son, respectivamente,

$$\begin{aligned} p_1 \frac{\partial F^1(L_1)}{\partial L_1} + \frac{\partial \pi_2(L_1)}{\partial L_1} &= w \\ p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_2} &= w \end{aligned}$$

y recordamos que:

$$\frac{\partial \pi_2(L_1)}{\partial L_1} = p_2 \frac{\partial F^2(L_1, L_2)}{\partial L_1}$$

entonces reestablecemos la optimalidad social.

Obsérvese que la primera solución que se discutió anteriormente corresponde al caso en el que la primera firma le ofrece una compensación a la segunda igual al perjuicio causado.

La segunda solución corresponde al caso en el que la primera firma tiene derecho a contaminar y la segunda le ofrece un compensación por reducir su actividad.

Ahora, suponga que la segunda firma tiene derecho a un río sin contaminación y que la negociación consiste en que la segunda firma le hace una oferta a la primera, acepta o rechaza de la siguiente forma: La segunda firma demanda una compensación T por los perjucicios causados. Luego, la segunda firma va escoger la compensación igual al menor valor que hace indiferente a la firma uno de aceptar la propuesta o rechazarla. Es fácil mostrar que este tipo de negociación también restablece el nivel de producción socialmente eficiente pero distinto a las dos soluciones anteriores.

Todas estas formas de negociación privada y asignación de derechos de propiedad restablecen eficiencia social y todas tienes consecuencias distribucionales distintas.

La solución de Pigou

En la siguiente sección vamos a introducir la solución de Pigou, pero antes, es bueno reescribir el problema centralizado, descentralizado y la solución de Coase en el siguiente contexto. Considere dos firmas $i = 1, 2$ con función de beneficios $\pi_1(x_1) = rx_1 - c(x_1)$, donde r es el precio de venta del producto, x_1 la cantidad que ofrece la firma 1 y $c(x_1)$ el costo. Por su parte, $\pi_2(x_1) = -e(x_1)$. Es decir, la firma 1 impone una externalidad en la firma 2, la cual, para propósitos del desarrollo de esta sección, toma la forma de contaminación sobre un río.

Ejercicio 8.8. Caracterice la solución eficiente de este problema como un problema de optimización de un planificador central y escriba las condiciones de primer orden del problema. Muestre que la solución descentralizada no satisface estas ecuaciones y, por lo tanto, es ineficiente. Caracterice la solución eficiente de este problema usando el mecanismo de Coase.

Ahora si consideremos la aproximación de Pigou. Supongamos que un planificador central le cobra un impuesto a la firma 1 igual a $e(x)$.

El problema de la firma 1 es:

$$rx_1 - c(x_1) - e(x_1)$$

y las C.P.O son:

$$r - c'(x_1^*) - e'(x_1^*) = 0$$

luego si el regulador le impone un impuesto $p^* = e'(x_1^*)$ y la firma resuelve:

$$rx_1 - c(x_1) - p^* x_1$$

entonces esta tributación (lineal) implementa el mecanismo de Pigou. El problema es que el regulador no conoce $e(x_1)$.

El mecanismo de compensación

El mecanismo de compensación consiste de un juego de información imperfecta en dos etapas.

1. Etapa de revelación del subsidio e impuesto: Las firmas son llamadas a anunciar cual es el subsidio e impuesto Pigoviano que soluciona el problema de ineficiencia: (p_1, p_2).

2. Pagos netos: Las firmas deben resolver el siguiente problema:

   La firma 1:
   $$rx - c(x) - p_2 x - \alpha_1 (p_1 - p_2)^2$$
   donde α_1 es cualquier parámetro mayor que cero.

   La firma 2:
   $$p_1 x - e(x)$$

Intuitivamente la firma 1 es llamada a pagar un impuesto proporcional al costo marginal según lo reporta la firma 2 y un costo por reportar algo diferente a lo que reporta 2. La firma 2 recibe una compensación proporcional a lo que la firma 1 reporta como el costo marginal. Este juego en dos etapas tiene múltiple equilibrios de Nash: cualquier strategia $((x, p), p)$ donde x maximice el beneficio de la firma 1 es un equilibrio de Nash. Sin embargo, tiene un único equilibrio perfecto en subjuegos: $((x_1^*, p^*), p^*)$ que implementa las asignaciones de Pigou.

Para ver esto resolvamos el juego por inducción hacia atrás. Obsérvese que en la primera etapa se escogen precios de forma simultánea y en la segunda la firma 1 escoge cantidades y la 2 es pasiva. Supongamos que p_1, p_2 es dado y la firma 1 maximiza su beneficio: esto significa escoger $x_1^*(p_2)$ tal que:

$$r - c'(x^*(p_2)) - p_2 = 0$$

En la primera etapa del juego, es un juego estático en el que cada firma escoge precios de forma simultánea. Dado p_2 la firma 1 escoge $p_1 = p_2$. Esa es su mejor respuesta.

Ahora, en la primera etapa si la firma 2 maximiza su beneficio entonces escoge p_2 para maximizar:

$$p_1 x(p_2) - e(x(p_2))$$

que tiene C.P.O:

$$\begin{array}{l} \left(p_1 - e'(x(p_2))\right) x'(p_2) \\ \Rightarrow \\ p_1 - e'(x(p_2)) \end{array}$$

Combinando las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$r - c'(x^*) - e'(x^*) = 0$$

Se puede demostrar que este es también el único equilibrio en estrategias mixtas. Este es un mecanismo balanceado en equilibrio (i.e., en equilibrio la suma neta de subsidios y tranferencias es cero) pero no por fuera de equilibrio. Con más de dos agentes es posible hacer el mecanismo balanceado por fuera de equilibrio. También se puede implementar el mecanismo con impuestos no lineales.

Ejemplo 8.9 (Dilema de los prisioneros)**.** Considere el juego:

1\2	C	D
C	5,5	2,6
D	7,1	3,3

La pregunta es, ¿cómo se puede inducir la asignación eficiente en la que ambos cooperan y el equilibrio es eficiente y además la única asignación eficiente? Sea $x_1 = 1$ si el jugador 1 coopera. Cero de lo contrario y lo mismo para el segundo jugador. La utilidad de cada jugador la denotamos por

$u_i(x_1, x_2)$.

Mecanismo de compensación I: El primera etapa los jugadores anuncian: $\left((p^1_{12}, p^1_{21}),\ (p^2_{21}, p^2_{12})\right)$, el jugador 1 y 2 respectivamente. En la segunda etapa ellos escogen si cooperan o no. El agente 1 maximiza:

$$u_1(x_1, x_2) + p^2_{21}x_1 - p^2_{12}x_2 - (p^1_{21} - p^2_{21})^2$$

y 2 maximiza:

$$u_2(x_1, x_2) + p^1_{12}x_2 - p^1_{21}x_1 - (p^2_{12} - p^1_{12})^2$$

Demostrar que cooperar es un equilibrio perfecto en subjuegos y que cualquier $\left((p^1_{12}, p^1_{21}),\ (p^2_{21}, p^2_{12})\right)$ tal que:

$$\begin{array}{l} p^1_{21} = p^2_{21} \geq 2 \\ p^1_{12} = p^2_{12} \geq 1 \end{array}$$

son precios que implementan el equilibrio.

Ahora, mostrar adicionalmente que si:

$$\begin{array}{rcl} 4 & \geq & p^1_{21} = p^2_{21} \geq 2 \\ 3 & \geq & p^1_{12} = p^2_{12} \geq 2 \end{array}$$

El equilibrio es eficiente y es la única asignación eficiente.

Alternativamente, para este caso podemos dar otra version del mecanismo de compensación.

Mecanismo de compensación II: En la primera etapa los jugadores anuncian: $\left(p^1_2,\ p^2_1)\right)$etapa los jugadores anuncian si van a cooperar o no. En la segunda etapa ellos escogen si cooperan o no. El agente 1 maximiza:

$$u_1(x_1, x_2) - p^1_2 x_2 + p^2_1 x_1$$

y 2 maximiza:

$$u_2(x_1, x_2) - p^2_1 x_1 + p^1_2 x_2$$

Demostrar que cooperar es un equilibrio perfecto en subjuegos y calcular los precios que implementan el equilibrio.

Ejemplo 8.10. Considere el siguiente juego en dos etapas. En la primera es idéntico al dilema de los prisioneros. Cada jugador elige cooperar o acusar a su contrincante. En la segunda etapa los agentes deciden si aprueban o no lo que su adversario eligió. Si ambos aprueban se juega lo que propusieron y se obtiene el pago correspondiente del dilema de los prisioneros. Si alguno desaprueba se obteiene el pago que en el dilema de los prisioneros se obtiene cuando ambos acusan. Mostrar que estas estrategias implementan la cooperación entre los agentes haciendo inducción hacia atrás eliminando estrategias débilmente dominadas. Sin embargo, mostrar que no es un equilibrio perfecto en subjuegos. Es interesante que existe evidencia experimental que muestra que estas etrategias implementan cooperación en el 90 % de la veces en la primera ronda y 93,2 % a lo largo de varias rondas, mientras que el mecanismo de Varian implementa cooperación en el 63,3 % de la veces en la primera ronda y 75,2 % a lo largo de varias rondas (véase:L Tatsuyoshi Saijo, Takehito Masuda y Takafumi Yamakawa. (2018). Approval mechanism to solve prisoner's dilemma: comparison with Varian's compensation mechanism. Social Choice and Welfare).

8.5.2. El problema del Rey Salomón

El problema del Rey Salomón también ilustra las nuevas oportunidades estratégicas que surgen en juegos dinámicos y que permiten enriquecer el conjunto de resultados que son implementables.

Consideremos de nuevo el el problema del Rey Salomón. Dos mujeres, A y B, se aparecen en frente al Rey Salomón con un bebé. Cada una de las mujeres reclama al bebé como suyo. El valor para la verdadera madre del bebé es 100 y 50 para la mujer que no es la verdadera madre. El Rey no sabe quién es la verdadera madre pero sí sabe las valoraciones mencionadas. El Rey les propone jugar el siguiente juego.

1. El Rey va a preguntarle a la mujer A si ella es la verdadera madre. Si dice que no lo es le entrega el bebé a la mujer B. Si A responde afirmativamente se continua con el siguiente paso.

2. El Rey le pregunta a la mujer B si es la verdadera madre. Si dice que no lo es se le entrega el bebé a la mujer A. Si responde afirmativamente la mujer B le debe pagar al Rey 75 y se queda con el bebé y la mujer A debe pagarle 10 al Rey.

Ejercicio 8.11. Responda las siguientes preguntas.

1. Describa los dos juegos en forma extensiva que resultan de suponer que la mujer A es la verdadera madre y que la mujer B es la verdadera madre.

2. Calcular el equilibrio perfecto en subjuegos de cada juego.

3. A pesar de que el Rey no sabe cuál es el juego en forma extensiva que se está jugando, logra él con este mecanismo entregarle el bebé a la verdadera madre?

4. Tiene este juego otro equilibrio que no sean perfecto en subjuegos?

Capítulo 9

Juegos de información incompleta

9.1. Introducción

Existen muchas situaciones económicas en las que las partes tienen información diferente o asimétrica y donde esta información es relevante para los agentes. En general los agentes tienen información privada que es valiosa para los demás y tienen conjeturas sobre la información de los demás. Los problemas de información asimétrica son muy difíciles de resolver debido a esta multiplicidad de conjeturas que los agentes pueden tener sobre las conjeturas de los demás y viceversa. Esto sugiere la introducción de alguna hipótesis de consistencia entre las conjeturas de los agentes y su información privada. Para convertir un problema de estos en uno más manejable, Harsany introdujo una forma de pensar muy útil sobre este tipo de situaciones. El resultado final es un juego de información incompleta. A diferencia del caso de información asimétrica, cuando la información es incompleta los agentes tienen información privada, pero se supone que existe una relación estrecha entre las conjeturas que todos tienen de la información privada de los demás y la información misma de cada uno. Además, este supuesto de consistencia es conocimiento común. En las próximas secciones formalizamos el concepto de juego de información incompleta. Vamos a hacer especial énfasis en juegos estáticos y haremos una breve introducción a los juegos dinámicos de información incompleta, específicamente al caso particular de juegos de señalización.

9.2. Juegos estáticos

Un juego de información incompleta BG (o Juego Bayesiano) en forma normal es:

$$BG = (I, (A_i)_{i\in I}, (T_i)_{i\in I}, (\pi_i)_{i\in I}, F)$$

donde:

- I es un conjunto de jugadores (finito)[1].
- A_i es un conjunto de acciones para cada jugador.
- T_i es un conjunto de información para cada jugador o espacio de tipos.
- $\pi_i : A \times T \to R$ es la utilidad de cada jugador, $A = \prod_{i\in I} A_i$, $T = \prod_{i\in I} T_i$.
- F es una distribución de probabilidad sobre T con densidad f.

La distribución F es el modelo probabilístico del espacio de información de todos los agentes. Asumimos que todos los elementos del juego son conocimiento común. Esto convierte un problema de información asimétrica en uno de información incompleta.

Es posible dar una reinterpretación de un juego Bayesiano basado en un espacio de estados y una probabilidad común a todos los agentes y en el que estos reciben señales privadas, a través de una variable aleatoria (funcion de información) sobre cuál es el verdadero estado de la naturaleza. Esta formulación es equivalente a la anterior.

Ahora, los juegos de información incompleta se pueden clasificar según la forma específica de los pagos de los jugadores o según la estructura de información. En términos de la función de pagos estos pueden ser de valoración privada, interdependiente o común. El primer caso quiere decir que la función de pago de cada jugador es independiente de la información de los demás jugadores. La segunda quiere decir que la función de pago de cada jugador depende de la información de los demás jugadores, y la tercera quiere decir que la función de pago es común a todos los jugadores. En términos de información estos pueden ser de información independiente o información

[1] En este capítulo utilizamos I para denotar el conjunto de jugadores y N para denotar cierto estado de los jugadores.

correlacionada (*affiliated*).

Los juegos de información incompleta se desarrollan de la siguiente forma. Cada agente i es informado de forma privada de cierta información $t_i \in T_i$ (o su tipo t_i). Cada jugador solo conoce su información y no de la de los demás, t_{-i}. La idea ahora es que cada jugador utiliza la distribución condicional de F a la información recibida para cuantificar la probabilidad con la que los demás son informados. Más precisamente, si el agente i es informado de t_i entonces él cuantifica la incertidumbre de la información de los demás usando la distribución condicional $F(\cdot \mid t_i)$.

Para simplificar la exposición, vamos a suponer que la estructura de información es independiente. Esto es, la densidad de F se puede expresar como $f = \prod_{i \in I} f_i$ donde f_i es una densidad sobre T_i. La interpretación es la siguiente. El jugador i utiliza la distribucion $\prod_{j \neq i} f_j$ para evaluar la información de los demás agentes. Este supuesto quiere decir que la información de los jugadores es independiente. En particular, la información es puramente privada y no afecta cómo los demás cuantifican su propia información. Esto no quiere decir que la información de los demás agentes no tenga consecuencias sobre su utilidad. Los dos ejemplos siguientes esclarecen este punto.

Ejemplo 9.1 (Batalla de los sexos modificado)**.** Este ejemplo es una modificación de la batalla de los sexos estudiada en las notas anteriores (obsérvese que este ya no es un juego de coordinación). Tenemos dos jugadores $I = \{1, 2\}$, con espacios de estrategias $A_M = A_H = \{B, S\}$. Dependiendo del estado de ánimo la mujer puede tener preferencias distintas por ir al partido o de compras. Luego modelamos estos estados con los espacios de tipos: $T_M = \{B, S\}$, $T_H = \{N\}$. Solo la mujer sabe al levantarse cuál es su estado de ánimo. El hombre sabe el de él, pero no el de ella. Las funciones de pago son:

$$\pi_M, \pi_H : A_M \times A_H \times T_M \times T_H \to R$$

El hombre tiene las mismas preferencias independientemente del estado de ánimo de la mujer. Formalmente, π_1 no cambia de valor en su tercera componente.

Las preferencias de la mujer dependen de su estado de ánimo:

$\pi_M(\cdot, \cdot, B, \cdot) : A_M \times A_H \times T_H \to R$

$\pi_M(\cdot,\cdot,S,\cdot) : A_M \times A_H \times T_H \to R$
$\pi_H : A_M \times A_H \times T_M \times T_H \to R$

Hombre Mujer	B	S
B	3,2	2,1
S	0,0	1,3
Ánimo de ir al partido		

Hombre Mujer	B	S
B	1,2	0,1
S	2,0	3,3
Ánimo de ir de compras		

El hombre le atribuye una probabilidad subjetiva p a que la mujer amanezca con ánimo de ir al partido. En este sentido, f_M, f_H son funciones de masa de probabilidad sobre $\{B,S\}$ y $\{N\}$, respectivamente.

$$\begin{aligned} f_{-H}(B) &= f_M(B) = p \\ f_{-H}(S) &= f_M(S) = 1-p \\ f_{-M}(N) &= f_H(N) = 1 \end{aligned}$$

$f = f_M \times f_H$. Obsévese que en este caso la información no solo es puramente privada (independiente) sino que la información privada de ninguno de los dos afecta el pago del otro (los valores son privados).

Definición 9.2 (Estrategia)**.** Una estrategia es una función $\alpha_i : T_i \to A_i$. Una estrategia conjunta es una estrategia para cada jugador.

9.3. Soluciones de un juego

Definición 9.3. Una estrategia $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ domina (débilmente) a una estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$ si para toda estrategia $\alpha_{-i} : T_{-i} \to A_{-i}$ y $t \in T$:

$$\pi_i(\widehat{\alpha}_i(t_i), \alpha_{-i}(t_{-i})) \geq \pi_i(\alpha_i(t_i), \alpha_{-i}(t_{-i}))$$

con desigualdad estricta para por lo menos un α_{-i} y t.

Obsérvese que la definición anterior es equivalente a la siguiente. Una estrategia $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ domina (débilmente) una estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$ si para toda acción $a_{-i} \in A_{-i}$ y $t_i \in T_i$:

$$\pi_i(\widehat{\alpha}_i(t_i), a_{-i}) \geq \pi_i(\alpha_i(t_i), a_{-i})$$

con desigualdad estricta por lo menos para un a_{-i} y t_i. Una estrategia $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ es dominante (débilmente) si domina (débilmente) a toda estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$.

Ejemplo 9.4 (Batalla de los sexos modificado)**.** Las estrategias son:

$$\begin{aligned} \alpha_M &: \{B, S\} \to \{B, S\}. \\ \alpha_H &: \{N\} \to \{B, S\}. \end{aligned}$$

La estrategia $\alpha_M(B) = B$, $\alpha_M(S) = S$ domina débilmente cualquier otra estrategia para la mujer, luego es una estrategia dominante débilmente.

Definición 9.5 (Equilibrio en estrategias dominantes)**.** Un equilibrio en estrategias dominantes (débilmente) es un conjunto de estrategias $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ una para cada jugador tal que para todo $i \in I$, $\widehat{\alpha}_i$ es una estrategia dominante (débilmente).

Más adelante daremos un ejemplo de un equilibrio en estrategias dominantes en juegos de información incompleta (el equilibrio en la subasta al segundo precio). La importancia del concepto de equilibrio en estrategias dominantes es doble. De una parte supone una forma débil de racionalidad y de otra, es independiente de la estructura de información.

Definición 9.6 (Equilibrio de Nash-Bayesiano)**.** Un equilibrio Bayesiano es un conjunto de estrategias $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ una para cada jugador tal que para todo jugador $i \in I$ y para todo estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$ y $t_i \in T_i$:

$$E_{-i}[\pi_i(\widehat{\alpha}_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), t_i, T_{-i})|t_i] \geq E_{-i}[\pi_i(\alpha_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), t_i, T_{-i})|t_i]$$

En el caso particular en que la estructura de información es independiente, la última desigualdad la podemos escribir como:

$$E_{-i}[\pi_i(\widehat{\alpha}_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), t_i, T_{-i})] \geq E_{-i}[\pi_i(\alpha_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), t_i, T_{-i})]$$

donde el valor esperado se calcula utilizando la densidad f_{-i}.

Ejemplo 9.7 (Batalla de los sexos modificado)**.** Supongamos que:

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_M &: \{B, S\} \to \{B, S\}. \\ \widehat{\alpha}_H &: \{N\} \to \{B, S\}. \end{aligned}$$

es un equilibrio de Nash-Bayesiano.

La mujer no tiene ninguna incertidumbre sobre el estado de ánimo del hombre. Entonces, debe cumplirse:

$$\pi_M(\widehat{\alpha}_M(t_M), \widehat{\alpha}_H(N), t_M, N) \geq \pi_M(\alpha_M(t_M), \widehat{\alpha}_H(N), t_M, N)]$$

Como ella tiene una estrategia dominante débilmente, esta es, independiente de lo que el hombre haga, su mejor respuesta. Luego, el candidato a $\widehat{\alpha}_M$ es:

$$\widehat{\alpha}_M(B) = B, \widehat{\alpha}_M(S) = S.$$

Por su parte, el hombre tiene que calcular su mejor reacción a esta estrategia:

$$E_{-H}[\pi_H(\widehat{\alpha}_H(N), \widehat{\alpha}_M(T_M), N, T_M)] \geq E_{-H}[\pi_H(\alpha_H(N), \widehat{\alpha}_M(T_M), N, T_M)]$$

$$\begin{aligned} & p\pi_H(\widehat{\alpha}_H(N), B, N, B) + (1-p)\pi_H(\widehat{\alpha}_H(N), S, N, S) \\ \geq \quad & \\ & p\pi_H(\alpha_H(N), B, N, B) + (1-p)\pi_H(\alpha_H(N), S, N, S) \end{aligned}$$

Supongamos que $\widehat{\alpha}_H(N) = B$

$$\begin{aligned} & p\pi_H(B, B, N, B) + (1-p)\pi_H(B, S, N, S) \\ \geq \quad & \\ & p\pi_H(S, B, N, B) + (1-p)\pi_H(S, S, N, S) \end{aligned}$$

es fácil mostrar la anterior condición equivale a $p \geq \frac{3}{4}$. Si $p \leq \frac{3}{4}$, la estrategia óptima es $\widehat{\alpha}_H(N) = S$.

Obsérvese que si $p = \frac{3}{4}$ ambas estrategias para el hombre son una mejor respuesta. Por lo tanto cuando $p = \frac{3}{4}$ tenemos dos equilibrios en puras y una infinidad en mixtas.

Decimos que un juego de información incompleta es finito si tiene un número finito de jugadores, el espacio de acciones es finito y el espacio de tipos es finito. Una aplicación del teorema de Nash implica que, en este caso, siempre existe un equilibrio de Nash - Bayesiano en estrategias mixtas.

Ejemplo 9.8 (Paradoja de TKCD)**.** Considere el siguiente juego. [2] Alicia selecciona aleatoriamente dos números reales y los escribe en dos papeles que introduce en dos sobres cerrados. Después, Bob lanza una moneda para escoger uno de los dos sobres. Alicia le muestra el número del sobre seleccionado. Ahora Bob debe adivinar si el otro sobre tiene un número mayor o menor que el del sobre que le acaban de mostrar. Si acierta, gana 1000. Si pierde, pierde 1000. ¿Existe una estrategia para Bob cuyo beneficio esperado sea estrictamente mayor que cero?

Considere la siguiente estrategia mixta. Sea $f : R \to (0, 1)$ cualquier función estrictamente creciente. Dado el número x del sobre que le muestran a Bob, éste utiliza la siguiente estrategia mixta $(f(x), 1 - f(x))$ donde $f(x)$ es la probabilidad de no cambiar de sobre (i.e., el otro sobre tiene un número menor a x) y $1 - f(x)$ es la probabilidad de cambiar de sobre (i.e., el otro sobre tiene un número mayor a x). Sean x y x' los dos números reales que elige Alicia. Supongamos que $x < x'$. Ahora, la probabilidad de que a Bob le salga el sobre con el menor valor x es $\frac{1}{2}$. Luego, condicional a que le salió x su pago esperado de usar la estrategia mixta es:

$$-1000 \times f(x) + 1000 \times (1 - f(x)) \tag{9.1}$$

De otra parte, la probabilidad de que le haya salido el mayor valor x' es también $\frac{1}{2}$ y, condicional a que le salió x', su pago esperado de usar la estrategia mixta es:

$$1000 \times f(x') - 1000 \times (1 - f(x')) \tag{9.2}$$

De esta forma, el pago esperado para Bob es (obsérvese que cada uno de los eventos anteriores ocurre con probabilidad 0,5):

$$1000 \times (f(x') - f(x)) > 0 \tag{9.3}$$

y el beneficio esperado de esta estrategia es estrictamente mayor que cero.

Ejercicio 9.9. Escriba el anterior juego entre Bob y Alicia como un juego de información incompleta. Ayuda: el espacio de estrategias de Bob puede ser

[2] Tomado de http://www.xkcd.com/

$\{C, NC\}$ con C quiere decir el otro sobre tiene un número mayor (cambiar de sobre) y NC quiere decir el otro sobre tiene un número menor (no cambiar de sobre). Alicia tiene un espacio de estrategias trivial (no tiene estrategias). El espacio de tipos de Alicia y Bob son los número reales (el tipo de Alicia es el sobre que Bob no elige y el de Bob es el sobre que él elige).

Ejemplo 9.10 (Competencia imperfecta I)**.** Dos firmas tienen funciones de costos:

$$c_i\,(q_i) = cq_i$$

$c \in \{1, 2\}$. El valor de c es común a ambas firmas y la firma 2 le atribuye una probabilidad subjetiva p de que el costo sea 1. La firma 1 está informada del costo, pero la firma 2 no. Intuitivamente, ambas firmas operan la misma tecnología, la primera firma puede saber si está operando a costos marginales altos o bajos, mientras que la segunda no lo puede saber, pero sabe que tiene los mismos costos que la primera. La función de demanda inversa es:

$$P\,(Q) = \text{máx}\,\{M - dQ, 0\}$$

Formalamente, el juego Bayesiano es: $I = \{1, 2\}$, $A_1 \times A_2 = R_+ \times R_+$, $T_1 = \{1, 2\}\,, T_2 = \{t\}$ y el pago de cada jugador es:

$$\pi_i : R_+^2 \times \{1, 2\} \times \{t\} \to R$$

donde para la firma 1:

$$\begin{aligned} \pi_1(q_{11}, q_2, 1, t) &= (M - d(q_{11} + q_2) - 1)q_{11} \\ \pi_1(q_{12}, q_2, 2, t) &= (M - d(q_{12} + q_2) - 2)q_{12} \end{aligned}$$

y para la firma 2:

$$\begin{aligned} \pi_2(q_{11}, q_2, 1, t) &= (M - d(q_{11} + q_2) - 1)q_2 \\ \pi_2(q_{12}, q_2, 2, t) &= (M - d(q_{12} + q_2) - 2)q_2 \end{aligned}$$

Obsérvese que el payoff de la firma 2 depende de la información de la firma 1. Sin embargo, la información es puramente privada. Esto no sucedía en el caso de la batalla de los sexos.

Esto pone de manifiesto que en un juego de información incompleta la información puede ser completamente privada aun cuando la información privada de cada jugador afecte el payoff de los demás jugadores.

f_1 y f_2 son probabilidades discretas sobre $\{1, 2\}$ y $\{t\}$, respectivamente.

$$\begin{aligned} f_{-2}(\{1\}) &= f_1(\{1\}) = p \\ f_{-2}(\{2\}) &= f_1(\{2\}) = 1 - p \\ f_{-1}(\{t\}) &= f_2(\{t\}) = 1 \end{aligned}$$

Una estrategia para la firma 1 son dos niveles de producción q_{11} y q_{12} y para la firma 2 es un nivel de producción q_2.

Supongamos que $(\widehat{q}_{11}, \widehat{q}_{12}, \widehat{q}_2)$ es un equilibrio de Nash - Bayesiano. Entonces deben cumplirse las siguientes condiciones.

Para la firma 1, para todo $\overline{q}_{11} \in R_+$ y $\overline{q}_{12} \in R_+$,

$$\begin{aligned} (M - d(\widehat{q}_{11} + \widehat{q}_2) - 1)\widehat{q}_{11} &\geq (M - d(\overline{q}_{11} + q_2) - 1)\overline{q}_{11} \\ (M - d(\widehat{q}_{12} + \widehat{q}_2) - 2)\widehat{q}_{12} &\geq (M - d(\overline{q}_{12} + q_2) - 2)\overline{q}_{12} \end{aligned}$$

Para la firma 2, para todo $\overline{q}_2 \in R_+$,

$$\begin{aligned} & p(M - d(\widehat{q}_{11} + \widehat{q}_2) - 1)\widehat{q}_2 + (1 - p)(M - d(\widehat{q}_{12} + \widehat{q}_2) - 2)\widehat{q}_2 \\ \geq \\ & p(M - d(\widehat{q}_{11} + \overline{q}_2) - 1)\overline{q}_2 + (1 - p)(M - d(\widehat{q}_{12} + \overline{q}_2) - 2)\overline{q}_2 \end{aligned}$$

Suponiendo que existe una solución interior a los tres problemas de maximización es fácil mostrar que la esta es:

$$\begin{aligned} \widehat{q}_{11} &= \frac{2M - 1 - p}{6d} \\ \widehat{q}_{12} &= \frac{2M - 4 - p}{6d} \\ \widehat{q}_2 &= \frac{M - 2 + p}{3d} \end{aligned}$$

Ejercicio 9.11 (Competencia imperfecta II)**.** Considere el modelo de competencia imperfecta de Cournot. Supongamos que tenemos dos firmas que producen un bien homogéneo y compiten en cantidades. La función de demanda inversa está dada por $p = 1 - Q$ donde Q es la suma de las cantidades producidas por cada firma. Los costos de producción son constantes pero desconocidos (son información privada). Sin embargo, ambas firmas saben que los costos de producción tienen que ser c_l o c_h (intuitivamente, costos bajos y, costos altos). Supongamos que la distribución de probabilidad que genera los costos es:

$$F(c_h, c_h) = F(c_h, c_l) = F(c_l, c_l) = F(c_l, c_h) = \frac{1}{4}.$$

1. ¿Cúal es el espacio de estrategias de cada firma?
2. Escribir el problema de optimización (interim) de cada firma.
3. Calular el equilibrio de Nash - Bayesiano simétrico de este juego.

Obsérvese que existe otra definición natural de equlibrio. En esta definición suponemos que los agentes no han observado la realización de su propia información.

Definición 9.12 (Equilibrio exante)**.** Un equilibrio de Nash-Bayesiano exante es un conjunto de estrategias $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ tal que para todo jugador $i \in I$ y para todo estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$,

$$E[\pi_i(\widehat{\alpha}_i(T_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), T_i, T_{-i})] \geq E[\pi_i(\alpha_i(T_i), \widehat{\alpha}_{-i}(T_{-i}), T_i, T_{-i})]$$

Teniendo en cuenta esta diferenciación entre los conceptos de equilibrio, al primero que introdujimos lo llamaremos equilibrio de Nash - Bayesiano interim, mientras que a éste último nos referiremos como equilibrio exante.

Es obvio que si $\widehat{\alpha}$ es un equilibrio interim entonces este es un equilibrio exante. El converso también vale bajo condiciones muy débiles.

También es fácil de ver que un equilibrio en estrategias dominates es un equilibrio de Nash - Bayesiano.

Definición 9.13 (Equilibrio expost)**.** Un equilibrio expost es un conjunto de estrategias $\widehat{\alpha}_i : T_i \to A_i$ una para cada jugador tal que para todo jugador $i \in I$ y para todo estrategia $\alpha_i : T_i \to A_i$,

$$\pi_i(\widehat{\alpha}_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(t_{-i}), t_i, t_{-i}) \geq \pi_i(\alpha_i(t_i), \widehat{\alpha}_{-i}(t_{-i}), t_i, t_{-i})$$

Ejercicio 9.14 (Relación entre los conceptos de equilibrio)**.** Mostrar que el conjunto de equilibrios en estrategias dominates es un subconjunto del conjunto de equilibrios expost que a su vez es un subconjunto del conjunto de equilibrios de Nash-Bayesianos que es un subconjunto del conjunto de equilibrios exante.

Ejemplo 9.15 (Pavimentación carretera: Mecanismo estático)**.** Dos individuos que viven en lugares remotos y aislados consideran pavimentar la única carretera de acceso. Hacer esto cuesta 20. La única razón por la cual los individuos estarían interesados en pavimentar es si planean comprar un carro. Para cada individuo la valoración de la carretera, suponiendo que va comprar carro, es 30. Ahora describimos un mecanismos que llamaremos el mecanismo A (juego simultáneo) que consiste en lo siguiente. Los agentes envían una carta a un tercero manifestando el deseo de tener una carretera pavimentada. En caso de manifestar interés se intepreta la señal como si el individuo tuviera una valoración de 30 (intención de comprar carro) o cero de lo contrario Si los agentes manifiestan interés se construye la carretera y se comparte el costo (10 cada uno). Si solo uno manifiesta interes se construye y él la paga (20). Si ninguno manifiesta interés no se construye.

Para este mecanismo el espacio de acciones es $A_i = \{0, 30\}$, el espacio de tipos es $T_i = \{0, 30\}$, la probabilidad de que la valoración sea alta es p y los tipos son independientes. Los pagos son (obsérvese que este es un juego de valores privados):

$$\begin{aligned}
\pi_i^A(a_1, a_2, t_1, t_2) &= t_i - 20, \text{ si } a_i > a_j \\
\pi_i^A(a_1, a_2, t_1, t_2) &= t_j, \text{ si } a_i < a_j \\
\pi_i^A(a_1, a_2, t_1, t_2) &= t_i - 10, \text{ si } a_i = a_j = 30 \\
\pi_i^A(a_1, a_2, t_1, t_2) &= 0, \text{ si } a_i = a_j = 0
\end{aligned}$$

Si permitimos estrategias mixtas entonces una estrategia de equilibrio es:

$$\gamma_i : T_i \to \Delta(A_i)$$

Vamos a buscar una estrategia simétrica de equilibrio que denotamos por:

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= (u, 1-u) \\
\gamma(30) &= (w, 1-w)
\end{aligned}$$

Es claro que en equilibrio $u = 1$ con un pago esperado mayor o igual a cero. Un individuo con valoración cero no va mandar un mensaje distinto pues con probabilidad positiva puede suceder que le toque construir al él solo la carretera (en ninguna circunstancia gana y si puede perder con probabilidad positiva). Por ahora, en equilibrio:

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= (1, 0) \\
\gamma(30) &= (w, 1-w)
\end{aligned}$$

Ahora, en un equilibrio simétrico $w < 1$. De lo contrario el pago va ser cero para ambos con seguridad. Pero si un individuo con valoración alta piensa que el otro va enviar un mensaje de que su valoración es baja entonces su mejor respuesta es mandar un mensaje de que su valoración es alta. Por ahora, en equilibrio:

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= (1,0)\\ \gamma(30) &= (w, 1-w)\end{aligned}$$

con $w < 1$.

Ahora, es fácil verificar que si $p \leq \frac{1}{2}, w = 0$ es el único equilibrio simétrico (ejercicio).

De otra, si $p > \frac{1}{2}$ entonces $w > 0$ y por un argumento ya conocido $\gamma(30) = (1,0)$ y $\gamma(30) = (0,1)$ deben generar la misma utilidad para el individuo 1 cuando este conjetura que el individuo 2 va jugar $\gamma(0) = (1,0), \gamma(30) = (w, 1-w)$. En este caso, no es difícil demostrar que $w = 1 - \frac{1}{2p}$. En conclusión, el equilibrio simétrico de Nash - Bayesiano es:

$$\begin{aligned}\gamma^*(0) &= (1,0)\\ \gamma^*(30) &= \left(\text{máx}\left\{0, 1-\frac{1}{2p}\right\}, 1-\text{máx}\left\{0, 1-\frac{1}{2p}\right\}\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $p > \frac{1}{2}$, con probabilidad $\left(1-\frac{1}{2p}\right)^2$ no se construye la carretera a pesar de que ambos tengan valoración alta. Si por lo menos uno de ellos tiene valoración alta, algo que sucede con mayor probabilidad que el evento de que los dos tengan valoración alta, y en cuyo caso es eficiente construir la carretera, con probabilidad mayor a $1 - \frac{1}{2p}$ no se construye. Es decir, ¡entre mayor sea la probabilidad de que sea eficiente la construcción con menos probabilidad se construye!

9.4. Juegos dinámicos

Comencemos estudiando un ejemplo. En este ejemplo vamos a introducir un mecanismo (juego dinámico que llamaremos mecanismo B).

Ejemplo 9.16 (Pavimentación carretera: Mecanismo dinámico)**.** El mecanismo B consiste de lo siguiente. El primer individuo envía un mensaje sobre su disponibilidad a pagar por la construcción $\xi_1 \in [0, 20]$. En la segunda etapa, si $\xi_1 < 20$, el segundo individuo debe tomar la decisión sobre si financia el resto necesario para la construcción: $\xi_2 = 20 - \xi_1$. En cuyo caso se construye la carretera. Si $\xi_1 = 20$ también se construye.

Este mecanismo se puede interpretar como un juego de información incompleta en donde la información privada es la valoración de la carretera (que depende de si se piensa o no comprar carro).

Sea $T_i = \{0, 30\}$ y p la probabilidad de que la valoración de un individuo sea 30. Suponemos que esta es la misma para ambos individuos y es independiente. Luego, la distribución de probabilidad sobre el espacio de tipos (valoraciones) es: $P(30, 30) = p^2$, $P(30, 0) = P(0, 30) = p\,(1-p)$, $P(0, 0) = (1-p)^2$.

El espacio de acciones del primer individuo es $A_1^B = [0, 20]$. El espacio de estrategias del segundo individuo es, $A_2^B = \{a_2 : [0, 20) \to \{Y, N\}\}$.

Los pagos son:

$$\begin{aligned}
\pi_1^B(a_1, a_2, t_1, t_2) &= t_1 - a_1, \text{ si } a_1 = 20 \text{ o } a_2(a_1) = Y \\
\pi_1^B(a_1, a_2, t_1, t_2) &= 0, \text{ si } a_1 < 20 \text{ y } a_2(a_1) = N \\
\pi_2^B(a_1, a_2, t_1, t_2) &= t_2 - (20 - a_1), \text{ si } a_1 = 20 \text{ o } a_2(a_1) = Y \\
\pi_2^B(a_1, a_2, t_1, t_2) &= 0, \text{ si } a_1 < 20 \text{ y } a_2(a_1) = N
\end{aligned}$$

Una estrategia para el jugador 1 es:

$$\gamma_1 : T_1 = \{0, 30\} \to \Delta([0, 20])$$

Para el jugador 2 es:

$$\gamma_2 : T_2 = \{0, 30\} \to \{a : [0, 20) \to \Delta(\{Y, N\}))$$

Este juego tiene una multiplicidad de equilibrios. Vamos a concentrarnos en los equilibrios perfectos en subjuegos.

Considere el problema que enfrenta el segundo jugador. Obsérvese que estrictamente este no es un subjuego (pues 2 no sabe el tipo de 1). Sin embargo, es claro que tiene a su disposición toda la información relevante para tomar una decisión. Si el jugador 2 tiene valoración baja es obvio que su respuesta a cualquier mensaje de 1 es N. Lo contrario sucede si su valoración es alta. Ahora, 1 anticipa esto. Si su valoración es baja, claramente su mensaje es cero. Si su valoración es alta, su estrategia depende de su expectativa de qué va jugar 2.

Sea $\sigma = (\alpha, 1 - \alpha)$ (distribución de probabilidad sobre $\{0, 20\}$) la estrategia mixta que juega 1 cuando su valoración es alta. Su pago esperado es:

$$
\begin{aligned}
& p\overline{\pi}_1(\sigma, \gamma_2, 30, 30) + (1-p)\overline{\pi}_1(\sigma, \gamma_2, 30, 0) \\
= \; & p(\alpha\pi_1(0, Y, 30, 30) + (1-\alpha)\pi_1(20, Y, 30, 30)) + \\
& (1-p)(\alpha\pi_1(0, N, 30, 0) + (1-\alpha)\pi_1(20, N, 30, 0)) \\
= \; & p(\alpha(30) + (1-\alpha)10) + (1-p)(0\alpha + (1-\alpha)10) \\
= \; & p\alpha(30) + (1-\alpha)10 \\
= \; & 10 + \alpha(30p - 10)
\end{aligned}
$$

Luego, si $p = \frac{1}{3}, \alpha$ puede tomar cualquier valor. Si $p > \frac{1}{3}, \alpha = 1$. Si $p < \frac{1}{3}, \alpha = 0$.

Existen otros equilibrios de Nash Bayesianos que no satisfacen este criterio adicional de ser perfectos en subjuegos. Incluso son equivalentes en términos del resultado (véase Vega Redondo página 203). A diferencia del primer mecanismo, este mecanismos garantiza una asignación eficiente cuando el segundo jugador tiene valoración alta. Cuando el segundo jugador tiene una valoración baja, el segundo mecanismo asigna ineficientemente con certeza (cuando p es lo suficientemente grande). Este no es el caso en el primer mecanismo, aun cuando $p = 1$. El rango de valores de p para los que el mecanismo B es ineficiente es mayor que el rango de valores de A: $[\frac{1}{3}, 1]$ contra $[\frac{1}{2}, 1]$. Sin embargo, para p grande la probabilidad exante de que en el mecanismo B ocurra una asignación ineficiente es muy baja compardo con el mecanismo A.

9.4.1. Señalización

En algunos juegos dinámicos ciertas acciones de los agentes a lo largo del juego se pueden interpretar como señales que revelan información relevante para la contraparte. Sin embargo, la señal puedo no revelar perfectamente la información de interés. Por ejemplo, cuando una persona quiere comprar un carro usado le interesa la calidad del carro , la cual es información privada del vendedor. Ahora, si el vendedor hace una oferta, ésta puede interpretarse como una señal imperfecta de la calidad del carro.

El siguiente modelo ilustra las ideas prinicipales. Supongamos que hay dos jugadores. El primer jugador (jugador 1) puede ser de diferentes tipos. Su tipo es información privada y la distribución de probabilidad sobre su verdadero tipo es P que es conocimiento común. El jugador 1 envía un mensaje (señal) que usa el jugador 2 para condicionar sus acciones.

Los pagos para los dos jugadores son:

$u_i : T \times M \times A \to R$

donde T representa el espacio de tipos del jugador 1, M el espacio de estrategias del jugador 1 y A el espacio de acciones del jugador 2.

Una estrategia para el jugador 1 es una función $\gamma_1 : T \to M$ (o $\Delta(M)$) y una estrategia para el jugador 2 es una función $\gamma_2 : M \to A$ (o $\Delta(A)$).

Sea $I = \{1, 2\}$. Un juego de señalización entre dos jugadores es $SG = (I, T, P, M, A, (u_i)_{i \in I})$.

Definición 9.17 (Equilibrio Señalización en Mixtas)**.** Un equilibrio de señalización es un conjunto de estrategias (γ_1, γ_2) y una función de conjeturas $\mu : M \to \Delta(T)$ tal que:

1. La estrategia del jugador 1 es una mejor respuesta a la estrategia del jugador 2. Para todo t y $\nu \in \Delta(M)$:

$$\sum_m \gamma_1(t)(m)(\sum_a \gamma_2(m)(a)u_1(t, m, a)) \geq \sum_m \nu(m)(\sum_a \gamma_2(m)(a)u_1(t, m, a)) \tag{9.4}$$

2. Dada la función de conjeturas que el jugador 2 tiene sobre el tipo del jugador 1, la estrategia del jugador 2 es una mejor respuesta. Para todo m y $\alpha \in \Delta(A)$:

$$\sum_a \gamma_2(m)(a)(\sum_t \mu(m)(t)u_2(t, m, a)) \geq \sum_a \alpha(a)(\sum_t \mu(m)(t)u_2(t, m, a)) \tag{9.5}$$

   Obsérvese que la estrategia del jugador 1 no aparece en esta ecuación. Es decir, hasta este punto no se está suponiendo que los mensajes tiene que ser coherentes con la expectativa que el jugador 2 tiene de lo que va jugar el jugador 1.

3. Consistencia de la función de conjeturas y la estrategia que el jugador 2 supone que 1 va utilizar. Para todo $t' \in T$, y $m \in M$

$$\mu(m)(t') = \frac{P(t')\gamma_1(t')(m)}{\sum_{t \in T} P(t)\gamma_1(t)(m)} \tag{9.6}$$

cuando la fórmula hace sentido, caso contrario $\mu(m)(t')$ no tiene restricciones. Intuitivamente el lado derecho de esta última condición representa la probabilidad de que el tipo sea t' dado que el mensaje es m.

Definición 9.18 (Equilibrio Señalización en Puras)**.** Un equilibrio de señalización es un conjunto de estrategias (γ_1, γ_2) y una función de conjeturas $\mu : M \to \Delta(T)$ tal que:

1. La estrategia del jugador 1 es una mejor respuesta a la estrategia del jugador 2. Para todo t y $m \in M$:

$$u_1(t, \gamma_1(t), \gamma_2(\gamma_1(t))) \geq u_1(t, m, \gamma_2(m))) \tag{9.7}$$

2. Dada la función de conjeturas que el jugador 2 tiene sobre el tipo del jugador 1, la estrategia del jugador 2 es una mejor respuesta. Para todo $m \in M$ y $a \in A$:

$$\sum_t \mu(m)(t) u_2(t, m, \gamma_2(m)) \geq \sum_t \mu(m)(t) u_2(t, m, a) \tag{9.8}$$

   Obsérvese que la estrategia del jugador 1 no aparece en esta ecuación. Es decir, hasta este punto no se está suponiendo que los mensajes tiene que ser coherentes con la expectativa que el jugador 2 tiene de lo que va jugar el jugador 1.

3. Consistencia de la función de conjeturas y la estrategia que el jugador 2 supone que 1 va utilizar. Dado m sea $T_m = \{t \in T : \gamma_1(t) = m\} \neq \emptyset$. Entonces para todo $t' \in T_m$

$$\mu(m)(t') = \frac{P(t')}{\sum_{t \in T_m} P(t)} \tag{9.9}$$

   si $t' \notin T_m$ entonces $\mu(m)(t')$. Cuando T_m tiene probabilidad cero $\mu(m)(t')$ no tiene restricciones.

Ejemplo 9.19 (Equilibrio separador)**.** Considere una versión dinámica de la batalla de los sexos modificada en la que la mujer juega primero. En este caso el equilibrio de señalización es para la mujer su estrategia dominante, para el hombre $\gamma_2(B) = B, \gamma_2(C) = C$ y lo sustenta una función de conjeturas $\mu(B)(B) = 1, \mu(S)(S) = 1$. Este es un ejemplo de equilibrio separador que definiremos formalmente más adelante.

Ahora, cuando un jugador tiene una estrategia dominante, no siempre esta es su estrategia óptima en un equilibrio de señalización. El siguiente ejemplo ilustra esta situación. En este, a pesar de que el primer jugador tiene una estrategia dominante, al anticipar la reacción del segundo jugador prefiere jugar una estrategia dominada.

Ejemplo 9.20 (Equilibrio separador)**.** Considere la siguiente versión de la batalla de los sexos.

Hombre Mujer	B	S
B	1,2	3,1
S	0,0	2,3
Ánimo de ir al partido		

Hombre Mujer	B	S
B	2,2	0,1
S	3,0	1,3
Ánimo de ir de compras		

En el juego simultáneo la mujer utiliza una estrategia dominante. Sin embargo, en el juego dinámico en el que la mujer juega primero, la mujer no juega la estrategia dominante del juego estático. Obsérvese que el jugador 2 juega $\gamma_H(B) = B, \gamma_H(S) = S$ y la mujer juega $\gamma_M(B)(S) = 1, \gamma_M(S)(B) = 1$ y la siguiente función de conjeturas sustenta el equilibrio de señalización: $\mu(B)(S) = 1, \mu(S)(B) = 1$.

Obsérvese que en los dos juegos dinámicos que acabamos de discutir los dos equilibrios son separadores en el sentido de que la función de conjeturas revela perfectamente el tipo del jugador (en cada caso está concentrada en un solo tipo).

Ejemplo 9.21 (Equilibrio agrupador)**.** Considere la siguiente versión de la batallas de los sexos.

Hombre / Mujer	B	S
B	3,2	2,1
S	0,0	1,3
Ánimo de ir al partido		

Hombre / Mujer	B	S
B	2,2	0,1
S	3,0	1,3
Ánimo de ir de compras		

En este caso el equilibrio señalización es de la forma $\gamma_1(B) = B, \gamma_1(S) = B, \gamma_2(B) = B, \gamma_2(S) = S$ y $\mu(B)(B) = p, \mu(B)(S) = 1-p$. Es decir, el mensaje no revela nada nuevo sobre el tipo del primer jugador (obsérvese que la condición de consistencia no implica ninguna restricción sobre la función de conjeturas del jugador 1).

Verifiquemos que la tercera condición de la definición de equilibrio de señalización se cumple. Supongamos que $m = B$ entonces $T_m = \{B, S\}$ y la función de conjeturas es tal que $\mu(B)B = p, \mu(B)S = 1-p$. De otra parte si $t' = B$

$$\frac{P(B)\gamma_M(B)(B)}{\sum_{t\in T_m} P(t)\gamma_M(t)(m)} = \frac{p}{p\gamma_M(B)(B) + (1-p)\gamma_M(S)(B)} \tag{9.10}$$

$$= \frac{p}{p+(1-p)} \tag{9.11}$$

Cuando $t' = S$ la verificación es análoga. El caso en el que $m = S$ se deja como ejercicio.

Consideremos el siguiente ejemplo debido a Kreps y Wilson que resalta las dificultades de surgen en este tipo de interacciones estratégicas.

Ejemplo 9.22 (Cho and Kreps (1987))**.** En un bar se encuentran dos personas, cada un miembro de uno de dos posibles clanes. Un clan es agresivo y el otro clan es pacífico. En el clan pacífico (clan 1) existen dos tipos de integrantes: fuertes y débiles. En el clan agresivo (clan 2) solo existe un tipo de integrantes. Los integrantes de este clan no conocen el tipo de los integrantes del otro clan y tienen una conjetura (correcta) sobre la proporción que hay de cada tipo: el 90 % son fuertes, mientras que el 10 % son débiles. Las acciones disponible para el miembro del clan 1 es pedir una cerveza de desayuno (B) o pedir un Quiche (Q). El miembro del clan 2 no observa qué tipo de persona es la que esta desayunando, pero sí su desayuno, algo que puede servirle como una señal imperfecta del verdadero tipo de la persona. La siguiente figura 9.1 muestra todos los detalles del juego.

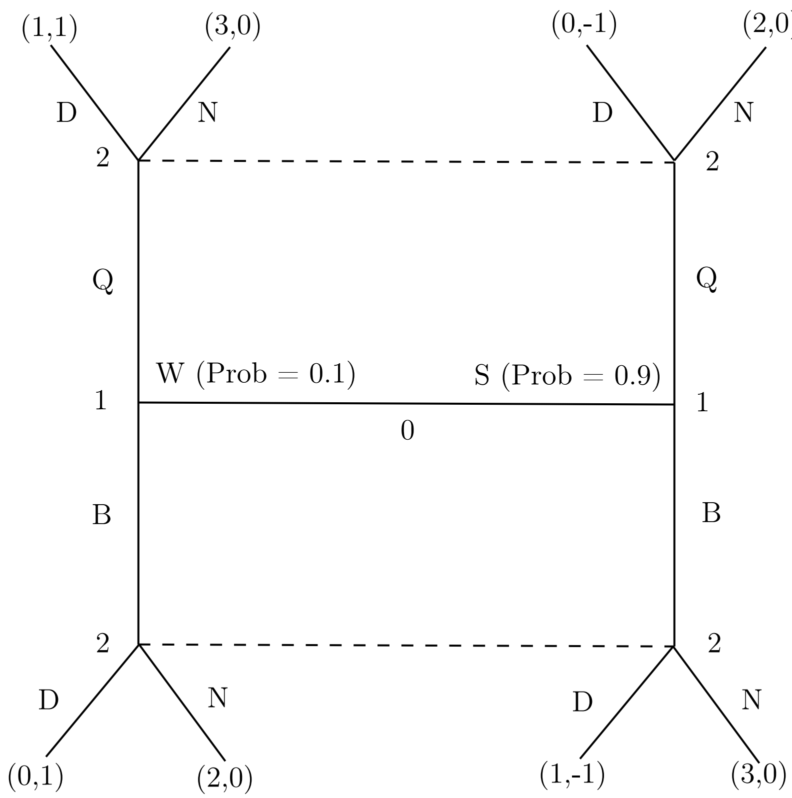


Figura 9.1: Juego de señalización de Cho y Kreps.

Ejercicio 9.23. Muestre que este juego no puede tener un equilibrio separador y calcule las condiciones bajos las cuales se obtienen dos equilibrios agrupadores.

Capítulo 10

Aplicaciones juegos de información incompleta

10.1. Teoría de subastas

Las subastas[1] son un mecanismo de asignación de recursos y formación de precios. Son un mecanismo universal y anónimo. Es decir, en general no dependen de los detalles específicos del bien a ser subastado ni de las identidades de los participantes. Vamos a considerar primero el caso en que es un único bien indivisible el que va ser subastado (e.g., una obra de arte). Las subastas se pueden clasificar por: (1) Tipo de bien: unitarias, multiunidades, paquetes de objetos, etc. (2) Estructura de información (independiente o afiliadas) o (3) Estructura de valoración (privada, interdependiente, común).

Cuando pensamos en el tipo de bien, por ejemplo, las subastas unitarias son subastas de un único bien como una obra de arte en la casa Christie's o una licitación para el desarrollo de una consultoría bien definida, etc. Una subasta de múltiples unidades es, por ejemplo, la venta de bonos en el mercado primario por parte de un gobierno. Usualmente estas emisiones tienen un número de bonos, todos con las mismas características (i.e., vencimiento, cupones y valor nominal), que se subastan entre un conjunto de creadores de mercado. Los creadores de mercado tiene preferencias por uno o mas bonos y pueden hacer múltiples ofertas por diferentes cantidades a diferentes precios (i.e., tasas de interés).

Las subastas también se pueden clasificar según la estructura de información

[1] Basado principalmente en Krishna (2009).

(independiente o afiliadas) o la estructura de valoración (privada, interdependiente o común). Esto quedará más claro más adelante que introduzcamos un poco de notación.

Para subastas de un único objeto existen cuatro subastas básicas:

- Primer precio (cerrada): En esta, cada participante de la subasta escribe en un papel cuanto esta dispuesto a pagar por el objeto y lo envía en un sobre cerrado al subastador. Ningún participante puede observar los que los demás están ofertando. El subastador abre todos los sobres y elige al ganador como el que más oferto por el objeto. Este jugador debe pagar lo que declaró en su sobre cerrado.

- Segundo precio (cerrada): En este formato, cada participante de la subasta escribe en un papel cuanto esta dispuesto a pagar por el objeto y lo envía en un sobre cerrado al subastador. Ningún participante puede observar los que los demás están ofertando. El subastador abre todos los sobres y elige al ganador como el que más oferto por el objeto. Este jugador debe pagar la segunda oferta más alta declarada por todos los participantes.

- Inglesa (abierta). Vamos a considerarar una forma distinta a los formatos que se usan típicamente en el mundo real. Supongamos que todos los participantes se encuentran en un salón y el subastador anuncia un precio muy bajo. Les pide a los participantes que, mientras tengan disponibilidad a pagar el precio anunciado, mantengan una mano levantada. Ahora el subastador comienza a anunciar precios cada vez más altos. En la medida que el precio anunciado, conocimiento común de todos los participantes va aumentando lentamente, algunos participantes bajan su mano. En algún momento en este proceso deben quedar únicamente dos participantes con la mano levantada. Continuando con este proceso debe llegar un momento en que el precio es tan alto que uno de los dos participante baja la mano y solo queda uno con la mano arriba. En este momento el participante con la mano levantada se lleva el objeto y paga el precio que se encuentra anunciado en ese momento (el precio en el cual el segundo participante que tenia la mano levanta, bajo su mano).

- Holandesa (abierta). Este formato es similar al anterior pero se comienza con un precio muy alto y todos los participantes con las manos abajo. El precio comienza a bajar de forma paulatina y el precio es público, conocimiento común para todo los participantes. En algún momento alguno de los participantes levanta una de sus manos señalizando que está dispuesto a llevarse el objeto por el precio que esta siendo anunicado.

Por simplicidad, en todos los casos anteriores suponemos que no hay empate. En caso de empate los resultados que se van a presentar no cambian y lo único que debemos acordar es una regla para dirimir estos empates. Por ejemplo, de forma aleatoria, usando una distribución uniforme elegir el ganador entre los que hacen ofertas iguales más altas. Obérvese que los primeros dos formatos son cerrados, las ofertas se hacen de forma privada y no se conoce ningún precio. En los últimos dos, el precio de cierre (de transacción) se va formando de forma abierta y, en principio, en la medida que se va formando el precio los agentes pueden ir aprnediendo algo de la valoraciones que los demás tienen del objeto.

Otros ejemplos de subastas son las subastas al tercer precio (gana el que más oferta pero paga la tercera oferta más alta!) y todos pagan (gana el que más oferta pero todos pagan lo que ofertaron). Ahora, una lotería es un mecanismo de asginación de recursos, pero no es una subasta (estándar). Una subasta es estándar cuando el ganador es el que más ofrece por el bien. Hay muchos ejemplos de subastas que no son estándar. Entre ellos se encuentra el mercado de compras públicas de la Bolsa Mercantil de Colombia, la licitación de basuras de Bogotá, algunas licitaciones de infraestructura en varios países del mundo, o algunas que han utilizado empresas en Bogotá para contratar servicios. Todos estos mecanismos de asignación tienen en común que no gana el que más ofrece (o menos cobra en el caso de las licitaciones) sino que se calcula un precio promedio y la oferta más cercana por encima del promedio es la ganadora. En el siguiente capítulo estudiaremos un ejemplo de este tipo de mecanismo de asignación.

Las preguntas fundamentales que se hace la teoría son:

- ¿Existe de equilibrio del juego Bayeasiano inducido?
- ¿Son equivalentes en el sentido de que en equilibrio asignan de la misma forma?
- ¿Es el precio en equilibrio el mismo?
- ¿Es óptimo para el subastador en el sentido de maximizar su ingreso esperado?

- ¿Bajo que condiciones son estos mecanismo eficientes en el sentido de Pareto. Si no lo es, ¿Cuál es la pérdida en eficiencia por utilizar una subasta como mecanismo de asignación? En la literatura especializada este problema se conoce como el precio de la anarquía.
- ¿Tiene el agente incentivos para participar de ese mecanismo de asignación de recursos (se conoce como racionalidad individual)?
- ¿Cuáles son los incentivos a coludir de los particpantes?
- ¿ Son las reglas del mecanismo sencillas y fáciles de entender? Esto puede ser fundamental para incentivar la participación de agentes.
- ¿Es posible a partir de los datos observados, ofertas, asignaciones, precios de equilibrio, etc., identificar los fundamentales del modelo?
- ¿Es posible refutar la implicaciones de la teoría ?

10.1.1. El modelo básico de subastas

El modelo estándar tiene la siguiente estructura. Estructura de información independiente y simétrica, estructura de valoración privada y agentes neutros al riesgo. En particular, agentes simétricos (esto tiene dos componentes: información y valoración). El modelo estándar se puede representar como un juego de información incompleta con la siguiente estructura:

$$BG = (I, (R_+)_{i \in I}, [0, \omega], (\pi_i)_{i \in I}, F)$$

donde $I = \{1, ..., N\}$ es un conjunto de jugadores y el conjunto de acciones es el mismo para todos: $A_i = R_+$. El supuesto de estructura de información independiente lo formalizamos de la siguiente forma: el conjunto de información es el mismo para todos: $T_i = [0, \omega]$. En este caso interpretamos el conjunto de información como la valoración privada del objeto que tiene el agente. Suponemos que la función de probabilidad sobre el conjunto de información $T = [0, \omega]^I$ que caracteriza los juegos Bayesianos es de la forma F^N donde F es una distribución de probabilidad sobre $[0, \omega]$ y que esta tiene densidad f. Aquí nos alejamos ligeramente de la notación introducida en las notas anteriores donde F era la distribución sobre T. Sin embargo, como forma de recordar este caso especial, obsérvese que en la especificación del juego Bayesiano sólo especificamos un conjunto de información $[0, \omega]$ y una sola función de distribución F sobre $[0, \omega]$.

La interpretación es la siguiente. En el modelo estándar de subastas el jugador i utiliza la densidad $\prod_{j\neq i} f = f^{n-1}$para evaluar la información de los demás agentes.

Este supuesto quiere decir que la información de los jugadores es independiente. En particular, la información es puramente privada y no afecta cómo los demás cuantifican su propia información.

Por último, $\pi_i : R_+^I \times [0,\omega]^I \to R$ es el pago de cada jugador y su forma específica depende del tipo de subasta que estemos considerando. Cuando π_i no depende de t_{-i} decimos que la subasta es de valores privados. Específicamente suponemos que el pago de cada jugador es de la forma $\pi_i(b_i, b_{-i}, t_i) = t_i - l_i(b_i, b_{-i})$ donde $l_i(b_i, b_{-i})$ representa la transferencia de cada jugador al subastador. Esta representación de la función de pagos pone en evidencia las hipótesis de valoraciónón privada y neutralidad al riesgo.

Para resumir, utilizaremos T para denotar el conjunto de información $[0,\omega]^I$ y F^n para denotar la función de distribución sobre T.

10.1.2. Subasta al segundo precio

En esta subasta cada agente observa su valoración $t_i \in T_i = [0,\omega]$ y escribe en un sobre su oferta por el bien. Gana el jugador que más ofrezca y paga la segunda oferta más alta. En caso de empate se asigna el objeto aleatoriamente entre los ganadores (y paga el valor ofertado).

El payoff de los agentes es:

$$
\begin{aligned}
\pi_i &: R_+^I \times [0,\omega]^I \to R \\
\pi_i(b_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) &= t_i - \max_{j\neq i}\{b_j\} \text{ si } b_i > \max_{j\neq i}\{b_j\} \\
\pi_i(b_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) &= 0 \text{ si } b_i < \max_{j\neq i}\{b_j\}
\end{aligned}
$$

La expresión del payoff pone en evidencia algunos de los supuestos que hicimos anteriormente (valoración privada y neutralidad al riesgo).

Proposición 8. En la subasta al segundo precio la estrategia de revelar la verdadera valoración es un equilibrio en estrategias dominantes (débilmente).

Prueba. Una estrategia para cada jugador es una función $\mathbf{b}_i : [0,\omega] \to R_+$. Vamos a demostrar que la estrategia de revelar la verdad para cada jugador, $\mathbf{b}^{II}(t_i) = t_i$, es un equilibrio en estrategias dominantes (débilmente).

Supongamos que cada agente observa su valoración privada y hace una oferta por el bien. Fijemos un agente, digamos el agente i y concentremonos en su estrategia. Sea $Y_1 = \max_{j \neq i} \{b_j\}$. Y_1 determina si el agente i gana o no.

Primero algunas observaciones: $\mathbf{b}_i(t_i) > t_i$ no es racional (en el sentido débil) pues la estrategia $\overline{\mathbf{b}}_i$ que es igual $\mathbf{b}_i$ en todas partes excepto en t_i, donde es revelar la verdadera valoración, la domina débilmente - cuando la valoración es t_i, el payoff del agente nunca es menor y con probabilidad positiva es mayor.

El argumento es independiente de las estrategias utilizadas por los demás jugadores.

Si $\mathbf{b}_i(t_i) < t_i$ pueden suceder tres cosas:

Casos	Payoff		
	Resultado	Estrategia $\mathbf{b}_i$	Estrategia $\mathbf{b}^{II}$
$Y_1 \leq b_i < t_i$	i gana	$t_i - Y_1$	$t_i - Y_1$
$b_i < Y_1 < t_1$	i pierde	0	$t_i - Y_1$
$b_i < t_1 \leq Y_1$	i pierde	0	0

Comparando con el resultado que hubiera tenido de utilizar la estrategia de revelar la verdad es claro que ésta última la domina. Formalmente lo que hemos hecho es demostrar que la estrategia $\mathbf{b}^{II}(t_i) = t_i$ domina a cualquier otra estrategia $\mathbf{b}_i$. Esto es:

$$\pi_i(t_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) \geq \pi_i(\mathbf{b}_i(t_i), b_{-i}, t_i, t_{-i})$$

para todo $t \in T$ y b_{-i} ■

Obsérvese que en ninguna parte utilizamos la estructura de información y que la estrategia es la misma para cada jugador. Esto es lo que se conoce como un equilibrio simétrico. Este equilibrio es independiente de la estructura de información y de que el espacio de valoración sea $[0, \omega]$. En particular, vale aún en el caso en que la información sea correlacionada o en el que los conjuntos de información son diferentes. Adicionalmente, el resultado no depende de la aversión al riesgo de los participantes.Esta subasta es eficiente desde el punto de vista social.

Para avanzar más en la propiedades de estos mecanismos de signación necesitamos un conocimiento mínimo del concepto de esperanza condicional. Para nosotros es suficiente lo siguiente. La esperanza condicional de una variable aleatoria X con valores en los números reales, dado un conjunto $\{X \leq x\}$,

$E[X|X \leq x]$, se define como:

$$E[X|X \leq x] = \frac{1}{F(x)} \int_0^x y f(y) dy \tag{10.1}$$

donde F es la función de distribución de X y f es la densidad de F. Con esta definción podemos estudiar el pago esperado de la subasta en equilibrio.

El *pago esperado* (pago esperado interim en este equilibrio) de un agente con valoración t, $m^{II}(t)$ es:

$$m^{II}(t) = G(t) E_{-i} \left[Y_1 \mid t > Y_1 \right]$$

donde $G(t)$ es a probabilidad de ganar (la probabilidad que el agente le atribuye al conjunto $[t > Y_1]$, es decir, la distribución de Y_1) y $E_{-i} [Y_1 \mid t > Y_1]$ es el pago esperado del agente dado que es ganador).

La estrategia de revelar la verdadera valoración es un equilibrio en estrategias dominantes (débiles). Esto quiere decir que si eliminamos las estrategias dominadas débilmente seleccionaríamos este equilibrio. Sin embargo, existen otro tipo de equilibrios que, aunque extraños, podrían ser pasados por alto sin ninguna relfexión sobre su significado. Por ejemplo, supongamos que los agentes utilizan las siguientes estrategias:

$$\begin{aligned} b_i &= w \\ b_{-i} &= 0 \end{aligned}$$

Es fácil ver que estas estrategias son un equilibrio expost y, en particular, son un equilibrio de Nash Bayesiano.

10.1.3. Subasta al primer precio

En esta subasta los agentes observan su valoración (información) y hacen una oferta. Gana el que oferte más alto y paga lo ofertado. En caso de empate, el bien se asigna aleatoriamente.

El payoff de los agentes es:

$$\begin{aligned} \pi_i &: R_+^I \times [0, \omega]^I \to R \\ \pi_i(b_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) &= t_i - b_i \text{ si } b_i > \max_{j \neq i} \{b_j\} \\ \pi_i(b_i, b_{-i}, t_i, t_{-i}) &= 0 \text{ si } b_i < \max_{j \neq i} \{b_j\} \end{aligned}$$

Obsérvese que existe un compromiso claro (*trade-off*) entre ofertar alto (aumenta la probabilidad de ganar) y el pago (disminuye el payoff). Intuitivamente, esto implica que la oferta óptima de cada agente debe ser menor que su valoración. Este compromiso no existe en la subasta al segundo precio y por eso en esta subasta los agentes pujan hasta su valoración.

Nos vamos a concentrar en el equilibrio simétrico. En este caso no existe un equilibrio en estrategias dominantes. Vamos a caracterizar el equilibrio de Nash-Bayesiano. Supongamos que i tiene una valoración t_i y ofrece $b_i \in R_+$. Supongamos que todos los jugadores $j \neq i$ utilizan una estrategia $\mathbf{b}^I$ diferenciable y creciente. Es claro que $b_i \leq \mathbf{b}^I(\omega)$ (de lo contrario ganaría con seguridad, pero también ganaría con seguridad reduciendo su oferta un poco). También es fácil de ver que si $t_i = 0$ entonces $b_i = 0$ y $\mathbf{b}^I(0) = 0$ (pues en caso de ofertar positivo y ganar, el payoff sería negativo).

Ahora, el conjunto de valoraciones de los demás agentes para las cuales i gana es el siguiente.

$$\left\{ b_i > \max_{j \neq i} \left\{ \mathbf{b}^I(t_j) \right\} \right\} = \left\{ b_i > \mathbf{b}^I(Y_1) \right\} = \left\{ \left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i) > Y_1 \right\}$$

Denotamos por G la distribución de Y_1 (Y_1 es la valoración más alta entre las de los demás agentes). Si la estructura de información es independiente y simétrica tenemos que $G = F^{N-1}$ y su densidad g es $g = (N-1)\, F^{N-2} f$. Entonces la probabilidad de ganar con una oferta b_i es la probabilidad que i le atribuye al conjunto:

$$\left\{ b_i > \max_{j \neq i} \left\{ \mathbf{b}^I(t_j) \right\} \right\}$$

que es:

$$G(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i))$$

Por lo tanto el payoff (interim) del jugador i se puede escribir como:

$$E_{-i}[\pi_i \mid T_i = t_i] = G(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i))(t_i - b_i)$$

Las condiciones de primer orden con respecto a b_i son:

$$\frac{g(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i))}{\frac{d\mathbf{b}^I\left(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i)\right)}{dt_i}}(t_i - b_i) - G(\left(\mathbf{b}^I\right)^{-1}(b_i)) = 0$$

Ahora, si existe un equilibrio simétrico entonces $\mathbf{b}^I(t_i) = b_i$ y las CPO se reducen a:

$$
\begin{aligned}
\frac{g(t_i)}{\frac{d\mathbf{b}^I(t_i)}{dt}}(t_i - b_i) - G(t_i) &= 0 \\
&\Rightarrow \\
\frac{d\left(G(t_i)\mathbf{b}^I(t_i)\right)}{dt_i} &= tg(t_i) \\
&\Rightarrow \\
\mathbf{b}^I(t_i) &= \frac{1}{G(t_i)}\int_0^{t_i} yg(y)dy \\
&= E[Y_1|Y_1 < t_i].
\end{aligned}
$$

Es fácil mostrar que en efecto $\mathbf{b}^I$ es un equilibrio creciente simétrico:

Primero, obsérvese que $\mathbf{b}^I$ es creciente y diferenciable. Vamos a demostrar que no existen incentivos a desviarse de esa estrategia. Supongamos que el jugador i tiene una valoración t y supongamos que ofrece b donde $\mathbf{b}^I(z) = b$. Es decir, el ofrece como si su valoración fuera z.[2] El payoff esperado es:

$$
\begin{aligned}
E_{-i}[\pi_i(b, \mathbf{b}^I_{-i}(T_{-i}), t, T_{-i})] &= G(z)(t - \mathbf{b}^I(z)) \\
&= G(z)t - G(z)\mathbf{b}^I(z) \\
&= G(z)t - \int_0^z yg(y)dy \\
&= G(z)(t - z) + \int_0^z G(y)dy
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
& E_{-i}[\pi_i(\mathbf{b}^I(t), \mathbf{b}^I_{-i}(T_{-i}), t, T_{-i})] - E_{-i}[\pi_i(\mathbf{b}^I(z), \mathbf{b}^I_{-i}(T_{-i}), t_i, T_{-i})] \\
= \;& G(z)(z - t) - \int_t^z G(y)dy \\
\geq \;& 0.
\end{aligned}
$$

Utilizando la definición de esperanza condicional, la estrategia $\mathbf{b}^I$ se puede escribir como:

$$\mathbf{b}^I(t) = E_{-i}[Y_1 \mid Y_1 < t]$$

[2]Esta forma de replantear el problema es lo que se conoce como el mecanismo directo asociado a la subasta al primer precio.

$$\mathbf{b}^{I}(t) = t - \int_0^t \frac{G(y)}{G(t)} dy < t.$$

Es decir, la oferta óptima está estrictamente por debajo (cuando $t > 0$) de la verdadera valoración.

El *pago esperado* de un agente con valoración t, $m^I(t)$ es:

$$\begin{aligned} m^I(t) &= G(t)E_{-i}[Y_1 \mid t > Y_1] \\ &= m^{II}(t) \end{aligned}$$

Obsévese que $m^I(t) = m^{II}(t)$. Este es un caso particular del

teorema de equivalencia del ingreso esperado para el subastador que estudiaremos de forma más general en las próximas secciones.

Por último, obsérvese que subasta es eficiente desde el punto de vista social: el bien es asignado al que más lo valora.

Ejemplo 10.1 (Información uniforme)**.** Si la estructura de información es uniforme en $[0,1]$ entonces

$$\mathbf{b}^{I}(t) = \frac{N-1}{N}t.$$

Ejemplo 10.2 (Información exponencial)**.** Si la estructura de información es exponencial en $[0,\infty)$, $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ para algún $\lambda > 0$ y si solo hay dos agentes ($N = 2$) entonces

$$\mathbf{b}^{I}(t) = \frac{1}{\lambda} - \frac{t\exp(-\lambda t)}{1 - t\exp(-\lambda t)}.$$

10.1.4. Subastas abiertas y la relación entre los diferentes formatos de subastas

La subasta al primer precio y la subasta holandesa son estratégicamente equivalentes. Además, este resultado es independiente de la estructura de información, valoración o actitud frente al riesgo. Por eso decimos que es una equivalencia fuerte. Informalmente, para ver esto pensemos en el problema estratégico que engrenta un agente cuando participa de una subasta holandesa. El agente puede obervar el precio anunciado en todo momento y no tiene incentivos a levantar su mano hasta tanto el precio no llegue a su valoración. A partir de ese momento debe evaluar dos cosas: si levanta la mano rápido su probabilidad de ganar aumenta pero el pago neto es bajo. Si espera un poco, la probabilidad de ganar disminuye (más participantes están esperando el momento para levantar la mano) pero el pago neto aumenta. Esta es exactamente la situacion estratégica que enfrenta un agente en la subasta al primer precio. Ahora obérvese que en la medida que va disminuyendo el precio, este es poco informativo para los agentes de la información privada de los demás pues, los demás puede ser que no levanten la mano porque tienen una valoración baja o quieren aumentar su pago neto esperando lo suficiente.

Ahora, bajo el supuesto de valores privados, la subasta inglesa es equivalente a la subasta al segundo precio. Sin embargo, la equivalencia no es estratégica (la estructura de valoración es importante). Por ello decimos que la equivalencia es débil. De forma análoga al caso anterior, obsérvese que mientras va subiendo el precio y se observa que algunos agentes bajan su mano manifestando retirarse de la competencia, esta información revela que los participantes tiene es valoración y, por lo tanto, si la subasta no fuera de valores privados esto iría cambiando la valoración que tiene los demás del objeto subastado.

10.1.5. Equivalencia del ingreso esperado para el subastador

Supongamos que estamos bajo las condiciones del modelo estándar. Además, supongamos que el pago esperado de un jugador con valoración privada cero, es cero (lo que sucede, por ejemplo, bajo los cuatro formatos de subastas estándar).

Teorema 10.3 (Teorema de Equivalencia del Ingreso para el Subastador)**.** Bajo las condiciones enunciadas arriba, cualquier equilibrio simétrico creciente genera el mismo ingreso esperado para el subastador.

Prueba. Sea $m^A(t)$ el pago esperado de un individuo con valor t en una subasta A y $\mathbf{b}^A(t)$ un equilibrio creciente simétrico. Por hipótesis $m^A(0) = 0$. El payoff esperado del jugador que reporta $\mathbf{b}_i^A(z)$ (como si su valoración hubiera sido z) es:

$$E_{-i}[\pi_i(\mathbf{b}_i^A(z), \mathbf{b}_{-i}^A(T_{-i}), t, T_{-i})] = G(z)t - m^A(z).$$

Las condiciones de primer orden con respecto a z evaluadas en $z = t$ son:

$$\begin{aligned} \frac{dm^A(y)}{dy} &= yg(y) \\ &\Longrightarrow \\ m^A(t) &= G(t)E_{-i}[Y_1 \mid Y_1 < t]. \end{aligned}$$

Lo que muestra que el pago esperado de cada jugador es independiente del mecanismo particular de la subasta. ■

El teorema se puede extender al caso en que los agentes tienen valoraciones interdependientes. Ahora, obsérvese que la demostración depende de que los agentes son neutros al riesgo.

Ejemplo 10.4. Si la estructura de información es uniforme en $[0, 1]$ entonces

$$m^A(t) = \frac{N-1}{N} t^N$$

y el ingreso esperado del subastador, $E[R^A]$ es:

$$E[R^A] = NE[m^A] = \frac{N-1}{N+1}$$

Por último, algunas observaciones: Si el subastador es averso al riesgo, él prefiere la subasta al primer precio que al segundo precio. La subasta al segundo precio genera ingresos más volátiles. En la subasta al segundo precio las ofertas están en $[0, w]$. En la subasta al primer precio están en $[0, E[Y_1 \mid Y_1 < t]] \subset [0, E[Y_1]]$.

El teorema de equivalencia de ingresos para el subastador puede ser utilizado para calcular las ofertas de equilibrio en la subasta todos pagan, guerra del desgaste, subasta al tercer precio e incertidumbre en el número de jugadores (véase Krishna (2009)).

10.1.6. Precio reserva

Supongamos que el subastador anuncia un precio mínimo al que está dispuesto a vender el objeto y consideremos primero la subasta al el segundo precio. En este caso los agentes hacen sus oferta y gana el que más oferta siempre y cuando esa oferta sea superior al precio de reserva, de lo contrario el subastador se queda con el objeto. Cuando hay un ganador, este paga el máximo entre la oferta la segunda oferta más alta y el precio de reserva. En esta subasta al segundo precio con precio de reserva sigue siendo cierto que la estrategia de revelar la verdad es un equilibrio en estrategias dominantes (débilmente). Independientemente de lo que los demás hagan, si la valoraciónón es mayor o igual que el precio de reserva es óptimo revelar la valoración. Si es menor, no hay ninguna posibilidad de obtener un pago neto positivo. En este caso revelar la verdad es indiferente para el agente.

Sea F_r la distribución de la variable aleatoria $max\{r, Y_1\}$. El pago esperado, $m^{II}(t, r)$ de un agente con valoración t en una subasta con precio de reserva $r \leq t$ es:

$$\begin{aligned} m^{II}(t, r) = P(t > max\{t, Y_1\})E_{-i}\left[max\{r, Y_1\} \mid x > max\{r, Y_1\}\right] \\ = \int_0^t ydF_r = \int_0^r ydF_r + \int_r^t ydF_r \\ = \int_0^r ydF_r + \int_r^t ydG \\ = rG(r) + \int_r^t ydG \\ = rG(r) + \int_r^t yg(y)dy \end{aligned}$$

Obsérvese que cuando $t = r$:

$$m^{II}(r, r) = G(r)r$$

Un análisis similar al que realizamos anteriormente para la subasta el primer precio, permite demostrar que, en la subasta al primer precio con precio de reserva, cuando $t \geq r$ la estrategia

$$b^I(t, r) = E_{-i}\left[\max\{r, Y_1\} \mid t > Y_1\right]$$

es un equilibro de Nash - Bayesiano. Obsérvece que como $t \geq r$ entonces: $b^I(t, r) = E_{-i}\left[\max\{r, Y_1\} \mid t > \max\{r, Y_1\}\right]$ luego el pago esperado en la subasta al primer precio con precio de reserva es:

$$m^I(t, r) = P(t > max\{r, Y_1\})b^I(t, r) = \tag{10.3}$$
$$P(t > max\{r, Y_1\})E_{-i}\left[\max\{r, Y_1\} \mid t > \max\{r, Y_1\}\right] = m^{II}(t, r) \tag{10.4}$$

Obsérvese que:

$$m^I(t, r) = m^{II}(t, r)$$

luego, el ingreso esperado del subastador es el mismo aún con precios de reserva.

Estudiemos ahora cuál es el efecto del precio de reserva sobre el ingreso esperado el subastador. Sea t_0 la valoración que el subastador tiene del objeto (hasta este punto habiamos hecho el supuesto de que era cero, pero esto no es necesario). Entonces el ingreso esperado para el subastador es:

$$NE[m^A(t, r)] + F(r)^N t_0$$

donde A es la subasta al primer precio o segundo precio. No es dificil mostrar que el precio de reserva r^* que maximiza el ingreso esperado del subastador satisface:

$$r^* - \frac{1}{\lambda(r^*)} = t_0$$

donde $\lambda(r^*) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$.

Obsérvese que $r^* > t_0$, luego es óptimo para el subastador poner un precio de reserva superior a su valoración. En particular, de esta forma el subastador va a excluir de la subasta a jugadores con valoraciones inferiores a su precio de reserva aún cuando éstos tengan valoraciones superiores a su propia valoración t_0. Esto se conoce como el principio de exclusión y hace que la subasta óptima sea ineficiente. Obsérvese que el precio de reserva depende de la estrutura de información de los jugadores. En este sentido la subasta con precio de reserva óptimo no es libre de detalles y en la práctica es muy difícil conocer el precio de reserva óptimo.

Ejercicio 10.5. ¿Por qué el teorema de equivalencia del ingreso esperado para el subastador no aplica para subastas con diferentes valores del precio de reserva?

Ejercicio 10.6. Supongamos que solo hay dos agentes, la valoración para el subastador es cero y la estructura de información es uniforme en $[0, 1]$. Muestre que $r^* = \frac{1}{2}$ y $E\left[m^A(T, r)\right] = \frac{5}{12}$.

Un instrumento alternativo para aumetar los ingresos del subastador es poner una cuota de participación. Esta tiene el mismo efecto que el precio de reserva.

10.2. Ejercicios

1. Subastas. Considere el modelo estándar de subastas excepto que los agentes no son neutros al riesgo pero tienen una misma función de utilidad que es estrictamente monótona. Demostrar que en la subasta al segundo precio decir la verdadera valoración es una estrategia débilmente dominante.

Capítulo 11

Juegos repetidos

11.1. Introducción

Dos conceptos[1] nuevos surgen cuando consideramos que un juego puede repetirse un número finito o infinito de veces: coordinación y reputación. La característica principal de los juegos repetidos es que cada vez que se deben tomar acciones, el juego es el mismo. La repetición finita de un juego puede introducir equilibrios nuevos (equilibrios de Nash o equilibrios perfectos en subjuegos), diferentes a jugar siempre el equilibrio del juego estático. Entre más grande sea el horizonte, más equilibrios pueden surgir.

11.2. Ejemplo horizonte finito

Vamos a estudiar algunos ejemplos en horizonte finito que ilustran algunas de las ideas principales.

Ejemplo 11.1. Considere el siguiente juego repetido dos veces:

1\2	D	C
D	1,1	4,0
C	0,4	3,3

En este juego, todos los equilibrios del juego repetido implican jugar (D, D) en cada etapa. Sin embargo, la estrategia C puede utilizarse por fuera del camino de equilibrio. Por ejemplo, considere la siguiente estrategia para cada

[1]Basado en el Capítulo 8 de Vega-Redondo (2003).

jugador. En la primera etapa jugar D y en la segunda etapa, si el adversario jugó D jugar D, de lo contrario jugar la mixta: $(\frac{7}{8}, \frac{1}{8})$, que significa que se juega D con probabilidad $\frac{7}{8}$ y C con probabilidad $\frac{1}{8}$. Para ver esto, consideremos dos potenciales casos de desviaciones unilaterales del jugador 1 (como el juego es simétrico, basta con verificar el caso de un jugador). Utilizando las estrategias sugeridas el pago de cada jugador es 2, la suma de los pagos en las dos etapas.

Caso I: El jugador 1 se desvía a C en la primera etapa y en la segunda etapa sigue la estrategia de equilibro, es decir, juega D. En este caso el jugador 2 sigue la estrategia de equilibrio y jugará C en la primera etapa y $(\frac{7}{8}, \frac{1}{8})$ en la segunda etapa. Luego el pago para el jugador 1 es $0 + \frac{7}{8} * 1 + \frac{1}{8} * 4 < 2$, y por lo tanto no hay incentivos a desviarse.

Caso II: El jugador 1 juega D en la primera etapa y se desvía a C en la segunda etapa. El jugador 2 sigue su estrategia de equilibrio y juega D en ambas etapas. Claramente esta desviación no beneficia al jugador 1 que obtiene un pago total de 1.

Ahora, a diferencia del ejemplo anterior, en el que todos los equilibrios son equivalentes en términos del resultado, puede ocurrir que surjan equilibrios nuevos.

Ejemplo 11.2. Considere el siguiente juego repetido dos veces:

1\2	D	C	P
D	1,1	4,0	-1,0
C	0,4	3,3	-1,0
P	0,-1	0,-1	-2,-2

El único equilibrio del juego estático es (D, D). Sin embargo, existen nuevos equilibrios del juego dinámico. Jugar C en la primera etapa y si el oponente juega C en la primera etapa jugar D. Caso contrario jugar P. Para ver esto de nuevo consideremos dos posibles desviaciones unilaterales del jugador 1. Si ambos jugadores usan las estrategas sugeridas el pago es 4 para cada jugador.

Caso I: El jugador 1 se desvía a D en la primera etapa y en la segunda etapa sigue la estrategia de equilibro, es decir, juega D. En este caso el jugador 2 sigue la estrategia de equilibrio y jugará C en la primera etapa y P en la segunda etapa, luego el pago para el jugador 1 es $4 - 1 < 4$, luego no hay incentivos a desviarse. Alternativamente, el jugador se pudo haber desviado a P en la primera etapa y después continuar la estrategia de equilibrio y jugar D. En este caso el jugador 2 juega C en la primera etapa y P en la segunda. Po rlo tanto el pago para el jugador 1 es $0 - 1 < 4$.

Caso II: El jugador 1 juega C en la primera etapa y se desvía a C en la segunda etapa. El jugador 2 sigue su estrategia de equilibrio y juega C en la primera etapa y D en la segunda etapa. En este caso el pago para el jugador 1 es $3 + 0 < 4$. Si en la segunda etapa el jugador decide mejor desviarse a P entonces su pago sería $3 + 0 < 4$.

11.3. Horizonte infinito

Ejemplo 11.3. Considere un juego repetido una infinidad de veces del juego estático:

1\2	D	C
D	-10,-10	0,-12
C	-12,0	-1,-1

y suponga que la utilidad de cada jugador es de la forma:

$$\pi_i^\delta = (1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1}\pi_i \tag{11.1}$$

donde π_i es el pago para i de acuerdo al juego estático y $\delta \in (0,1)$. El factor de descuento se puede interpretar como el nivel de impaciencia de los jugadores que valoran más los pagos en el presente que en el futuro. Entonces la utilidad intertemporal puede verse como un promedio ponderado de la utilidad en cada uno de los periodos (i.e., el factor $1-\delta$ hace que los pesos sumen 1).

Ahora considere la siguiente estrategia (*trigger strategy*):

1. En $t \geq 1$ jugar C si ningún jugador ha jugado D en $t-1$ o antes.
2. Caso contrario jugar D.

Si $\delta \geq \frac{2}{3}$ entonces esta estrategia es un equilibrio de Nash. Por simplicidad supongamos $\delta = \frac{2}{3}$. Para ver esto, obsérvese que el pago en el equilibrio propuesto π^* es (momentáneamente ignoremos el factor de normalización $\frac{1}{1-\delta}$):

$$\pi^* = \sum_{t=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^{t-1}(-1) = -3 \tag{11.2}$$

Donde hemos utilizado que para todo número real $x \in (0,1)$, $\sum_{t=1}^{n} x^{t-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$. Ahora, si alguien intenta desviarse en $t_0 = 0$ entonces su pago será:

$$\sum_{t=1}^{t_0-1}(\frac{2}{3})^{t-1}(-1) + 0 + \sum_{t=t_0+1}^{\infty}(\frac{2}{3})^{t-1}(-10) < -3. \tag{11.3}$$

Obsérvese que solamente hemos considerado desviaciones del equilibrio en una sola iteración del juego. Para una demostración de que esto es suficiente véase los ejercicios al final del capítulo. Un aspecto muy interesante, que será el objeto de estudio en el resto de este capítulo es que, en un juego repetido donde los agentes son lo suficientemente pacientes, es posible soportar como un equilibrio resultados eficientes y colaborativos.

El modelo general que vamos a considerar es el siguiente. El juego estático lo denotamos por $(N, (A_i), (\pi_i))$. Este juego se repite en varias ocasiones y todos los jugadores pueden observar lo que todos han jugado en el pasado. Las funciones de pago que vamos a considerar son de la forma:

$$\pi^{\delta} = (1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}\pi_i \tag{11.4}$$

Denotamos este juego repetido una infinidad de veces por $R^{\delta}(\pi)$.

11.3.1. Equilibrios de Nash

Sea $V = Conv\{v \in R^n : v = (\pi_1(a_1)....\pi_n(a_n)), a_i \in A_i\}$. Estos son los pagos posibles del juego estático incluyendo la posibilidad de que los jugadores utilicen un mecanismo de coordinación estocástico. Sea $\underline{v}_i$ el menor valor al que puede ser forzado i si todos los demás coordinan para castigarlo. Esto es:

$$\underline{v}_i = min_{\alpha_{-i}\in\Delta_{-i}} max_{\alpha_i\in\Delta_i}\pi_i(\alpha_i, \alpha_{-i}) \tag{11.5}$$

$\underline{v}_i$ puede interpretarse como una restricción de racionalidad individual ya que cualquier valor menor puede ser bloqueado por i.

Teorema 11.4 (Equilibrio de Nash en Horizonte Infinito)**.** Sea $(v_1, ...v_1) \in V, v_i > \underline{v}_i$ para todo i. Entonces, si δ es lo suficientemente grande, existe un equilibrio de Nash del juego $R^{\delta}(\pi)$ con pago v_i para cada jugador.

Prueba. Por simplicidad supongamos que existen $a_i \in A_i$ tal que $v_i = \pi_i(a_1, ..., a_n)$.[2] Sean $(\alpha_1^i, ..., \alpha_n^i)$ las estrategias que implementan el valor minmax para el jugador i. Esto es, para $j \neq i, \alpha_j^i$ son las estrategias de los demás jugadores que si coordinan fuerzan a i al mayor castigo y α_i^i es la mejor respuesta de i.

Ahora considere la estrategia para el jugador i: en t jugar a_i si antes de ningún jugador j se ha desviado de forma unilateral de jugar a_j. Caso contrario jugar α_i^j donde j es el pirmer jugador que se desvió de forma unilateral. Este es un equilibrio de Nash.

Si i intenta desviarse en t_0 a $\overline{a}_i$ el pago es:

$$(1-\delta)\sum_{t=1}^{t_0-1}\delta^{t-1}\pi(a_i, a_{-i}) + (1-\delta)\delta^{t_0-1}\pi(\overline{a}_i, a_{-i}) + (1-\delta)\sum_{t=t_0+1}^{\infty}\delta^{t-1}\pi(\alpha_i^i, \alpha_{-i}^i) \tag{11.6}$$

$$\leq (1-\delta^{t_0-1})v_i + (1-\delta)\delta^{t_0-1}\pi(\overline{a}_i, a_{-i}) + \delta^{t_0}\underline{v}_i \tag{11.7}$$

donde $\overline{a}_i$ es la mejor respuesta de i en el juego estático a a_{-i}.

Sea $f(\delta) = (1-\delta)v_i + (1-\delta)\delta^{t_0-1}\pi(\underline{a}_i, a_{-i}) + \delta^{t_0}\underline{v}_i$ y obsérvese que $\lim_{\delta \to 1} f(\delta) = \underline{v}_i < v_i$. Luego si δ es lo sufientemente cerca de 1 no existen incentivos a desviarse.

■

Ejemplo 11.5. Considere los siguientes juegos estáticos. En ambos casos el valor minmax en estrategias puras para cada jugador es 1. En el primer juego es posible implementar el pago eficiente $(4, 4)$. En el segundo juego, obsérvese que solo hay un equilibrio de Nash en el juego estático. Ahora, en el juego repetido es posible implementar el pago $(2, 2)$ que es inferior a jugar el equilibrio de Nash del juego estático en todas las repeticiones del juego.

[2] En este caso nos podemos restringir a estrategias puras.

$1\backslash 2$	X_2	Y_2
X_1	5,1	0,0
Y_1	4,4	1,5

$1\backslash 2$	X_2	Y_2	S_2
X_1	2,2	3,3	1,0
Y_1	3,3	4,4	0,0
S_1	0,1	0,0	0,0

11.3.2. Equilibrios Perfectos en Subjuegos

En el caso de equilibrios perfectos en subjuegos, existe un teorma similar al anterior. Sea $\widetilde{v}_i$ el menor pago que el jugador i puede llegar a tenr en un algún equilibrio de Nash del juego estático. Debe ser claro que $\widetilde{v} \geq \underline{v}_i$.

El teorema principal dice que si tenemos un vector de pagos $(v_1, ..., v_n)$ tal que $v_i > \widetilde{v}_i$ entonces si δ es lo suficientemente grande, existe un equilibrio perfecto en subjuegos del juego repetido $R^{\delta}(\pi)$ que implementa este vector de pagos.

11.4. Ejercicios

1. Principio de una única desviación es suficiente. Fijemos un jugador i y un conjunto de estrategias $(\gamma^*_{-i,t})_{t=1,...}$ para los demás jugadores. Sea $(\gamma^*_{i,t})_{t=1,...}$ una estrategia del jugador i y π^* el pago asociado cuando todos juegan $(\gamma^*_{i,t})_{t=1,...,i=1,...N}$. Supongamos que el jugador i tiene una estrategia $(\gamma_{i,t})_{t=1,...}$ tal que el pago asociado es $\pi > \pi^*$ cuando el usa esta estrategia y todos los demás usan $(\gamma^*_{-i,t})_{t=1,...}$. Demostrar que existe una estrategia $(\gamma'_{i,t})_{t=1,...}$ para el jugador i tal que:

   a) $\gamma'_{i,t} = \gamma^*_{i,t}$ para todo t excepto un único valor de $t = T$.

   b) $\pi^{'} > \pi^*$ donde $\pi^{'}$ es el pago de i cuando el usa la estrategia $(\gamma'_{i,t})_{t=1,...}$ y los demás usan $(\gamma^*_{-i,t})_{t=1,...}$.

Solución:

Para ver esto obsérvese que si $\pi > \pi^*$ entonces no puede ser cierto que para todo t: $\pi_t(\gamma^*_{i,t}, \gamma^*_{-i,t}) \geq \pi_t(\gamma_{i,t}, \gamma^*_{-i,t})$. Sea T cualquier t para el cual: $\pi_T(\gamma^*_{i,T}, \gamma^*_{-i,T}) < \pi_T(\gamma_{i,T}, \gamma^*_{-i,T})$ entonces la estrategia $(\gamma'_{i,t})_{t=1,...}$ para el jugador i tal que:

1. $\gamma'_{i,t} = \gamma^*_{i,t}$ para todo $t \neq T$
2. $\gamma'_{i,t} = \gamma_{i,t}$ para $t = T$

satisface las propiedad deseada.

Capítulo 12

Aplicaciones juegos repetidos

12.1. Cournot con información perfecta

Esta aplicación[1] pone de manifiesto cómo un grupo de empresas puede sostemer un cartel de forma tácita. Un arreglo colusivo se dice que es tácito si no se sustenta de forma explícita sino de forma no cooperativa como en los casos que se presentan en este capítulo. Tenemos n firmas que producen un bien homogéneo. Sea $F : R \to R$ la demanda agregada. Suponemos que satisface la ley de la demanda. La función inversa la denotamos por $P : R \to R$. Cada firma tiene una función de costos creciente $C_i : R_+ \to R_+$. Por simplicidad vamos a suponer que todas la firmas son homogéneas. El conjunto de estrategias de cada firma es el nivel de producción q_i. El pago neto $\Pi_i(q_i, q_{-i}) = P(Q)q_i - C_i(q_i)$, donde Q es la oferta total que suponemos se agota completamente en el mercado. Denotamos por x^c el producto de cada firma en el equilibrio de Nash simétrico del juego estático donde las firmas compiten a la Cournot.

Si las firmas pudieran coordinar creíblemente en un nivel de producción eficiente y simétrico entonces ellas podrían resolver el problema de maximización de la suma de los beneficios de todas las firmas. Denotaremos este nivel de producción eficiente por x^m. Supongamos que la función de demanda inversa es lineal $P(Q) = \text{máx}\{0, M - dQ\}$, y los costos marginales son constantes e iguales a c. Entonces los nivéles de producción respectivos son:

$$x^c = \frac{M - c}{(n + 1)d} \tag{12.1}$$

[1] Basado en el capítulo 9 de Vega-Redondo (2003)

y

$$x^m = \frac{M - c}{2nd} \tag{12.2}$$

Obviamente, con más de dos firmas: $x^c > x^m$

Si las firmas anticipan que competirán durante un número finito de periodos, sabemos que no van a surgir arreglos colusivos creíbles: el único equilibrio perfecto en subjuegos es replicar el equilibrio del juego estático. Si anticipan que van a competir de forma indefinida y si son lo suficientemente pacientes, estos pueden coordinar para sustentar el equilibrio eficiente x^m. En efecto, la estrategia: Jugar siempre x^m excepto si alguien se ha desviado con anterioridad en cuyo caso se juega siempre x^c, es un equilibrio que implementa el pago simétrico de colusión perfecta. El problema con esta estrategia es que primero, en general el castigo de desviarse en algún periodo (hacia el equilibrio de Nash del juego estático) no tiene consecuencias cuantitativamente muy importantes y segundo, está sustentada en una amenaza de castigo excesivamente prolongado que no parecería muy razonable dado que los agentes tienen también una infinidad de tiempo para renegociar en caso de que esto suceda.

Otro tipo de estrategias que mitigan estos dos problemas (castigos más relevantes y más cortos) son las estrategias de garrote y zanahoria (Abreu [1986]). Estas estrategias consisten en escoger un nivel de producción lo suficientemente bajo para que tenga efectos importantes en el el beneficio de las firmas (cuando todas producen esa cantidad). Llamamos este nivel, el nivel de producción de castigo y los denotamos por x^0. La estrategia se define ahora así.

En el primer periodo todos juegan x^m. En cualquier otro periodo, si todos han jugado x^m, jugar x^m. Si todos en el periodo anterior se han castigado entonces retornar a x^m. Cualquier otro caso castigar. Se puede demostrar que esta estrategia soporta que todos los periodos las firmas jueguen x^m. Obsérvese que en este caso los castigos duran poco (pero potencialmente deben ser fuertes eligiendo adecuadamente x^0). En efecto, si alguna firma decide de forma unilateral desviarse en t, en $t + 1$ todas las firmas usaran la producción de castigo y, en $t + 1$, todas volverán a jugar el nivel eficiente x^m.

12.2. Modelo dinámico de colusión tácita

En esta sección se describe la aplicación de un juego repetido entre firmas en un mercado oligopólico importante de la economía colombiana (y en cualquier economía). Describiremos muy brevemente el modelo teórico como una forma de motivar el modelo empírico. El modelo teórico esta basado en Green and Porter (1984) y su implementación está basada en el artículo clásico Porter (1983a). El objetivo principal de Green and Porter (1984) es estudiar la posibilidad y características de una arreglo colusivo implícito entre un grupo de firmas que sea compatible en incentivos. Un arreglo colusivo se dice que es tácito si no se sustenta de forma explícita sino de forma no cooperativa, como los equilibrios estudiados anteriormente que se sustentan mediante amenzas de castigos fuertes para aquellos que se desvien del equilibrio colusivo. Ahora, un arreglo colusivo tácito que tenga como consecuencia un equilibrio cercano al equilibrio monopoliístico podríamos decir que es un caso de ejercicio de poder de mercado que genera perdidas de bienestar para el consumidor más alla de las que se obtendrían en un equilibrio de Cournot.

En la teoría estudiada hasta este punto, los equilibrios colusivos tácitos se sustentan con amenazas de penalización para el que intente desviarse que actúan como mecanismo disciplinadores pero, en efecto, en los datos no observamos el ejercicio del castigo. Por lo tanto, de acuerdo a los modelos desarrollados hasta este punto en caso de observarse niveles de producción o precios bajos esto podría interpretarse como una situación en la que los agentes están tomando acciones de retaliación por incumplimiento de los acuerdos tácitos dejando entrever la imposibilidad de sostener la situación colusiviva. En el modelo de Green and Porter (1984) se racionaliza una forma de colusion tácita que es consistente con periodos de competencia monopolística y producción y cantidades relativamente bajos comparados con el resultado de un monopolio, y periodos de extracción máxima de rentas del consumidor con resultados similares a los del monopolio. Este resultado es importante porque pone en duda que la observación de precios bajos refleje un comportamiento autoregulador de las partes que sea inconsistente con un arreglo colusivo tácito.

12.2.1. El Modelo

Para racionalizar este comportamiento los autores estudian un modelo de competencia imperfecta con firmas heterogéneas que producen un bien homogéneo en presencia de choques agregados de demanda. Formalmente, suponagmos que tenemos N productores asimétricos en su tecnología, es decir, en su función de costos. En particular, el costo que enfrenta la firma i en el periodo t por producir q_{it} cantidades del bien homogéneo es:

$$C_i(q_{it}) = a_i q_{it}^{\delta} + F_i, \tag{12.3}$$

donde δ representa la elasticidad de los costos con respecto al producto[2], a_i denota el inverso de la productividad de la firma i y F_i son los costos fijos que enfrenta la firma en cada periodo.

Dado que el producto es homogéneo, se asume que en equilibrio todas las firmas fijan precios alrededor de un único precio promedio. Ahora, como vimos en capítulos anteriores, las acciones de la firma i bajo cualquier tipo de estructura competitiva pueden ser representadas por la siguiente expresión:

$$p_t\,(1 + \theta_{it}/\alpha_1) = MC_i(q_{it}), \tag{12.4}$$

donde $MC_i(\cdot)$ denota la función de costo marginal de la firma i. El término θ_{it} es denominado en la literatura como el parámetro de variación conjetural. El valor que tome este parámetro está determinado por el tipo de comportamiento competitivo que adopten las firmas en el mercado. Si se trata de un mercado competitivo, θ_{it} tenderá a cero. Si, en cambio, el mercado es mejor representado por un cartel o colusión tácita entre los productores, entonces θ_{it} deberá tender a 1.

En equilibrio, el precio promedio del mercado para el periodo t puede escribirse como la agregación ponderada de las ofertas individuales de las firmas:

$$p_t\,(1 + \theta_t/\alpha_1) = \sum_{i=1}^{N} s_{it} MC_i(q_{it}), \tag{12.5}$$

donde s_{it} es la participación de la firma i en el mercado y $\theta_t \equiv \sum_i s_{it}\theta_{it}$.

La función de demanda agregada en este mercado está representada por la siguiente ecuación:

$$\ln Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 \ln p_t + \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}_t + \varepsilon_t, \tag{12.6}$$

donde $Q_t \equiv \sum q_{it}$ es la demanda agregada y p_t es el precio del mercado en el periodo t. Por otra parte, $\mathbf{x}_t$ es un vector de variables exógenas que potencialmente afectan la demanda observada por el econometrista; por ejemplo,

[2] Este parámetro debe ser mayor que uno para que exista un equilibrio.

la actividad económica, el mes del año, entre otros. El término de error econométrico, ε_t, representa todos los choques de demanda no observados en los datos.

Se sigue que en equilibrio:

$$p_t\left(1+\theta_t/\alpha_1\right)=DQ_t^{\delta-1} \quad \text{con} \quad D\equiv\delta\left(\sum_{i=1}^{N}a_i^{1/(1-\delta)}\right)^{1-\delta}. \tag{12.7}$$

Nótese que θ_t varía entre periodos. La intención de esta especificación es relajar el supuesto sobre el tipo de competencia o sobre cuánto poder de mercado ejercen las firmas ante diferentes circunstancias. En particular, Porter (1983b) argumenta que en el juego repetido el oligopolio tiende a alternar entre dos tipos de regímenes: cooperativos y no cooperativos. Durante periodos cooperativos las firmas fijan precios para maximizar los beneficios conjuntamente; mientras que en los no cooperativos las firmas fijan precios para maximizar únicamente SUS propios beneficios. El argumento económico es que las firmas tienen incentivos a coordinar sus estrategias de precios cuando lo suma de los beneficios futuros de cada firma durante un acuerdo prolongado excede los beneficios que obtendría al momento de traicionar el acuerdo en un periodo más aquellos asociados a periodos indefinidos de competencia. De acuerdo con Porter (1983a), los regímenes no cooperativos son respuesta a choques negativos en la demanda que derivan en un precio mucho menor al resultante del acuerdo en condiciones normales de mercado. Entonces, bajo información incompleta la ruptura parcial del acuerdo funciona como un castigo ante la sospecha de que la caída en los precios esté asociada a desviaciones unilaterales.

Luego, el grado de competencia en el mercado estará determinado por las conjeturas agregadas de las firmas sobre las estrategias de sus competidores, es decir, el parámetro de variación conjetural definido como:

$$\theta_t=\begin{cases}\theta_c, & \text{si } t \text{ es un periodo cooperativo}\\ \theta_{nc}, & \text{caso contrario}\end{cases} \tag{12.8}$$

Ahora para identificar periodos en lo que se actua de forma cooperativa vs. periodos no cooperativos introducimos la variable I_t. Esta variable puede estar representada por políticas de precios, choque al mercado en consideración, entre otras. Entonces, la relación de oferta puede escribirse como:

$$\ln p_t=\beta_0+\beta_1\ln Q_t+\beta_2 I_t+\tilde{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{w}_t+\omega_t, \tag{12.9}$$

donde

$$\beta_0 = \ln D - \ln(1+\theta_{nc}), \qquad \beta_2 = \ln(1+\theta_{nc}/\alpha_1) - \ln(1+\theta_c/\alpha_1), \qquad \beta_1 = \delta - 1.$$

En este caso, $\mathbf{w}_t$ es un vector $L \times 1$ de variables exógenas observadas por el econometrista que afectan los costos de producción; por ejemplo, precio de materiales, aranceles, etc. Por último, dada la condición de equilibrio se asume que el término de error ω_t está potencialmente correlacionado con el término de error de la demanda, ε_t.

Es importante mencionar que dada la especificación de la demanda no es posible identificar separadamente θ_{nc} de D. Entonces, es necesario tomar un supuesto sobre el tipo de competencia que existe en el mercado durante periodos no cooperativos. Porter (1983b) asume que el precio durante periodos de no cooperación es igual al de un mercado perfectamente competitivo, es decir, $\theta_{nc} = 0$. Una alternativa es asumir que, en periodos no cooperativos, los precios y cantidades despachadas observadas corresponden a un equilibrio tipo Cournot. En tal caso, θ_{nc} será igual al índice Herfindahl–Hirschman (HHI) del mercado.

12.2.2. Metodología de estimación

A continuación, se describe el método para estimar los parámetros del modelo cuando I_t no es observada por el econometrista.

Se asume que I_t es generada por una distribución Bernoulli:

$$I_t = \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } \lambda \\ 0, & \text{con probabilidad } 1-\lambda \end{cases} \tag{12.10}$$

De acuerdo con Porter (1983b), la estimación de los parámetros puede representarse por un problema de regresión de ecuaciones simultáneas intermitentes; en este caso con 2 relaciones de oferta presentes en periodos diferentes y que se diferencian únicamente en el intercepto. El algoritmo de estimación es el propuesto por Kiefer (1980) y empleado a su vez en el estudio de Porter (1983a).

Entonces, el problema de ecuaciones simultáneas pude representarse como sigue:

$$\mathbf{B}\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{X}_t + \boldsymbol{\Delta} I_t + \mathbf{u}_t, \tag{12.11}$$

donde

$$\mathbf{y}_t = \begin{pmatrix} \ln Q_t \\ \ln P_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}_t \\ \mathbf{w}_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \omega_t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_t = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 \\ -\beta_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \tilde{\boldsymbol{\alpha}} & \mathbf{0}' \\ \beta_0 & \mathbf{0}' & \tilde{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix}$$

y donde se asume que $\mathbf{u}_t$ es generado de forma independiente a partir de una distribución normal bivariada con media igual a cero y varianza:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Se define entonces la función de densidad de $\mathbf{y}_t$, condicional en I_t, como

$$h(\mathbf{y}_t \mid I_t) = \frac{|\det(\mathbf{B})|}{2\pi\sqrt{\det(\mathbf{\Sigma})}} \times \exp\left\{ \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}\mathbf{y}_t - \mathbf{\Gamma}\mathbf{X}_t - \mathbf{\Delta}I_t \right)' \mathbf{\Sigma}^{-1} \left(\mathbf{B}\mathbf{y}_t - \mathbf{\Gamma}\mathbf{X}_t - \mathbf{\Delta}I_t \right) \right\}. \tag{12.12}$$

De nuevo, como I_t es no observada por el econometrista, la estimación de los parámetros por máxima verosimilitud debe incorporar esta incertidumbre. Entonces, la densidad no condicional del error está representada por la siguiente ecuación:

$$f(\mathbf{y}_t) = \lambda h(\mathbf{y}_t \mid I_t = 1) + (1 - \lambda) h(\mathbf{y}_t \mid I_t = 0), \tag{12.13}$$

y la función de verosimilitud es:

$$L(\mathbf{\Omega} \mid \lambda) = \prod_{t=1}^{T} f(\mathbf{y}_t), \tag{12.14}$$

donde $\mathbf{\Omega}$ es el vector que reúne todos los parámetros del sistema (12.11).

Dados unos valores de λ, los parámetros del modelo pueden estimarse mediante la maximización de (12.14). Teniendo esto en cuenta, Kiefer (1980) sugiere estimar tanto los parámetros del sistema de ecuaciones como λ mediante el siguiente algoritmo:

1. Defina una secuencia arbitraria de probabilidades $\{w_t^{(0)}\}_{t=1}^{T}$, donde cada elemento $w_t^{(0)}$ es una estimación de $Prob\{I_t = 1\}$

2. Calcule una estimación inicial de λ como sigue:

$$\lambda^{(0)} = \frac{1}{T} \sum_t w_t^{(0)}$$

3. Obtenga estimaciones iniciales de $\mathbf{B}$, $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Delta}$ y $\mathbf{\Sigma}$ maximizando $L(\mathbf{\Omega} \mid \lambda^{(0)})$.

4. Dado $\mathbf{\Omega}^{(0)} = \left(\mathbf{B}^{(0)}\ \mathbf{\Gamma}^{(0)}\ \mathbf{\Delta}^{(0)}\right)$, actualice $w_t^{(0)}$ siguiendo la regla de Bayes:

$$w_t^{(1)} = \frac{\lambda^{(0)} h(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{\Omega}^{(0)}, I_t = 1)}{\lambda^{(0)} h(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{\Omega}^{(0)}, I_t = 1) + (1 - \lambda^{(0)}) h(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{\Omega}^{(0)}, I_t = 0)}.$$

5. Repita los pasos 2 al 4 dada la actualización de probabilidades estimadas hasta alcanzar convergencia. En particular, se dice que el algoritmo converge en la iteración n cuando la correlación entre $\{w_t^{(n)}\}_{t=1}^T$ y $\{w_t^{(n+1)}\}_{t=1}^T$ es mayor a 0.999.

Adicionalmente, dada una secuencia estimada de probabilidades, $\{\hat{w}_t\}_{t=1}^T \equiv \{w_t^{(n)}\}_{t=1}^T$, es posible generar una proyección de I_t a partir de la variable latente como sigue:

$$\hat{I}_t = \begin{cases} 1, & \text{si } \hat{w}_t > \tau \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases} \tag{12.15}$$

donde τ es un valor arbitrario en definido en el intervalo $(0, 1)$.

De acuerdo con Porter (1983b), este procedimiento permite obtener estimaciones de I_t sin necesidad de asumir una forma funcional del proceso de generación de datos. Una posible extensión de este método es asumir que I_t sigue un proceso markoviano y restringir el proceso de estimación a una función de transición específica.

12.2.3. Resultados

Debido a la cantidad limitada de observaciones, es necesario elegir un criterio de eficiencia para definir los vectores de variables exógenas $\mathbf{x}_t$ y $\mathbf{w}_t$. Para ello se diseñó un algoritmo de selección cuyo objetivo es elegir el mejor modelo para explicar las siguientes ecuaciones en forma reducida para las cantidades y precios de equilibrio:

$$\ln Q_t = \gamma_0 + \boldsymbol{\gamma}_x \mathbf{x}_t + \boldsymbol{\gamma}_w \mathbf{w}_t \tag{12.16}$$

$$\ln P_t = \pi_0 + \boldsymbol{\pi}_x \mathbf{x}_t + \boldsymbol{\pi}_w \mathbf{w}_t \tag{12.17}$$

donde $\mathbf{x}_t$ y $\mathbf{w}_t$ corresponden a diferentes combinaciones de las variables disponibles en la base de datos. Entonces, se estiman (12.16) y (12.17) para diferentes definiciones de $\mathbf{x}_t$ y $\mathbf{w}_t$ y se elige la versión que minimiza el valor del criterio de información de Akaike.

De acuerdo con lo anterior, la mejor definición de $\mathbf{x}$ incluye, además de la constante, las siguientes variables:

- CONS: crecimiento anual del consumo agregado
- ln PIB: Logaritmo natural del PIB trimestral a precios constantes de 2005
- DESEMP: tasa de desempleo nacional mensual

Asimismo, la mejor definición de $\mathbf{w}$ incluye, además de la constante:

- ln MINES: Logaritmo natural de la producción minera agregada a precios constantes de 2005
- PBUILD: índice de precios del sector de construcción
- PMINES: índice de precios del sector minero
- ESMUN: variable indicadora para la entrada de competidores en 2012
- EVALLE: variable indicadora para la entrada de competidores en 2014
- EIMPO: variable indicadora para la entrada de importadores en 2011

En el los cuadros 1 y 2 se presentan los parámetros estimados del modelo correspondientes a la función de demanda (12.6) y relación de oferta (12.9), respectivamente. Los intervalos de confinaza al 95 % son calculados siguiendo el método *bootstrap* empleado para muestras finitas. Una vez se cuenta con estimaciones consistentes de los parámetros, se procede a contrastar diferentes hipótesis sobre la naturaleza del mercado.

En primer lugar, los parámetros estimados de la ecuación de demanda (12.6) son todos del signo esperado, aunque el desempleo y el consumo no son estadísticamente significativos. En particular, el valor estimado para el coeficiente asociado con el precio es consistente con la hipótesis de que este mercado es en promedio inelástico. La elasticidad-precio de la demanda estimada es $\hat{\alpha}_1 = -0{,}434$, lo cual implica que aumentos del 1 % en el precio están en promedio asociados con una disminución en la demanda de no más del 0.44 %. Asimismo, la demanda responde positivamente ante el crecimiento económico, representado por el PIB.

En cuanto a la relación de oferta (12.9), tanto el coeficiente asociado el nivel de producción, como aquel que mide el relacionado con el cambio de régimen son significativos y del signo esperado. Específicamente, el valor estimado de β_1 implica que aumentos repentinos del 1 % en la producción están asociados en promedio con un incremento en el costo marginal promedio del 2.25 % ($\hat{\delta} = \hat{\beta}_1 + 1 = 2{,}25$). Esto es consistente con la intuición de que en este mercado la oferta es incapaz de cubrir en el corto plazo los excesos de demanda debido al alto costo de capacidad y, por tanto, tiende a frenar los auges en demanda incrementando más que proporcionalmente los precios de venta. Por otro lado, de acuerdo con el valor estimado de β_2, se espera que el precio promedio del mercado sea 11 % más alto cuando existe cierta cooperación entre los productores al momento de definir sus precios. Otro aspecto que está significativamente correlacionado con la relación de oferta es la entrada de competidores. En particular, a partir de la entrada de nuevos productores, durante el año 2014 el precio promedio de la industria enfrentó una disminución permanente de casi un 24 %, con respecto al promedio en periodos pasados.

Cuadro 12.1: Coeficientes estimados para la demanda

	Estimado	IC 95 %
Constante	5,934*	[0.607 – 73.124]
$\ln P$	$-0{,}434^*$	[-5.542 – -0.001]
ln PIB	1,158*	[0.269 – 3.312]
DESEMP	$-0{,}027$	[-0.184 – 0.046]
CONS	0,995	[-0.482 – 5.311]

Nota: Estimación de la demanda del modelo de Porter (1983) en el mercado agregado. Intervalo de confianza al 95 % entre corchetes. (***) $0{,}01 < p$, (**) $0{,}05 < p$, (*) $0{,}1 < p$

Medición del poder de mercado

Dados los resultados de la estimación, el parámetro de variación conjetural se puede inferir a partir de la siguiente expresión:

$$\hat{\theta}_c = \hat{\alpha}_1 \times \left(\exp\left\{-\hat{\beta}_2 + \ln(1 + \theta_{nc}/\hat{\alpha_1})\right\} - 1\right) \tag{12.18}$$

donde el valor de θ_{nc} se define de acuerdo con las siguientes estructuras:

Cuadro 12.2: Coeficientes estimados para la oferta

	Estimado	IC 95 %
Constante	$-4{,}907$	[-10.71 – 12.366]
ln Q	$1{,}254^{*}$	[0.001 – 4.203]
I	$0{,}113^{*}$	[0.001 – 0.448]
PBUILD	$-0{,}003$	[-0.053 – 0.018]
PMINES	$-0{,}005$	[-0.019 – 0.001]
ESMUN	$0{,}063$	[-0.1 – 0.419]
EVALLE	$-0{,}237^{*}$	[-0.595 – -0.003]
EIMPO	$-0{,}181$	[-0.303 – 0.279]
ln MINES	$0{,}161$	[-3.835 – 1.07]

- $\theta_{nc} = 0 \rightarrow$ Mercado perfectamente competitivo:

$$\hat{\theta}_c \approx 0{,}05, \quad IC_{95\,\%} = [0, 0{,}5]$$

- $\theta_{nc} = 0{,}3 \rightarrow$ Oligopolio con competencia a la Cournot:[3]

$$\hat{\theta}_c \approx 0{,}32, \quad IC_{95\,\%} = [0{,}27, 0{,}74]$$

En ambos casos, el valor estimado para θ_c sugiere que el poder de mercado que pueden ejercer los productores en este mercado no crece significativamente en periodos de cooperación o fijación de precios coordinada. En otras palabras, las condiciones del mercado no parecen ser las adecuadas para que un cartel fije precios de monopolio de forma eficiente.

Los valores estimados para α_1, θ_c y $\{\hat{w}_t\}_{t=1}^{T}$ también nos permiten inferir el costo marginal promedio de la industria a partir de la ecuación (12.5). Las figuras 12.1 y 12.2 muestran la serie estimada para el costo marginal promedio[4] para los casos con $\theta_{nc} = 0$ y $\theta_{nc} = HHI$, respectivamente.

Adicionalmente, en la Figura 12.3 se compara la evolución del precio de mercado frente al costo marginal estimado asumiendo competencia a la Cournot en periodos no cooperativos. Los intervalos sombreados en gris indican periodos con alta probabilidad de cooperación entre las firmas. El margen precio-costo promedio implícito se muestra en la Figura 12.4. El margen es otro indicador del poder de mercado de la industria ya que refleja el valor que las firmas pueden cobrar en promedio sobre lo que sería el precio de mercado más competitivo posible. Al comparar la evolución de este margen con

[3]Se emplea $HHI = 0{,}3$ calculado para 2015-2016.

[4]Con su respectivo intervalo de confianza al 95 %.

la TRM promedio mensual, se puede apreciar que la industria ejerce menor poder de mercado en periodos en los cuales el peso colombiano se deprecia con respecto al dólar americano.

Figura 12.1: Costo marginal promedio estimado asumiendo competencia perfecta en periodos no cooperativos

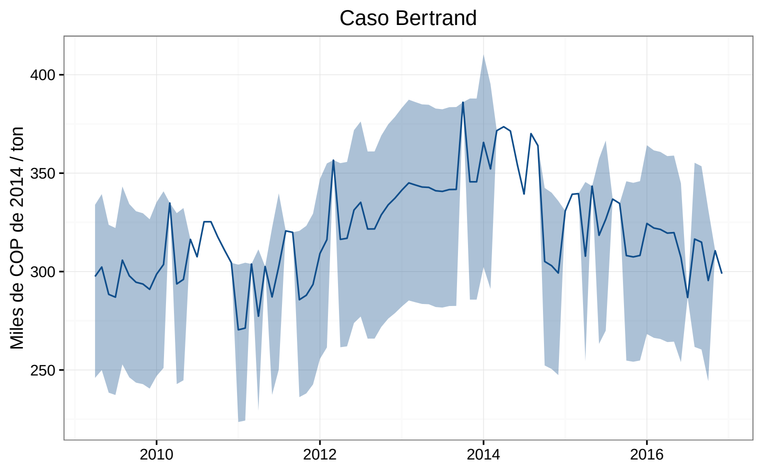


Figura 12.2: Costo marginal promedio estimado asumiendo competencia a la Cournot en periodos no cooperativos

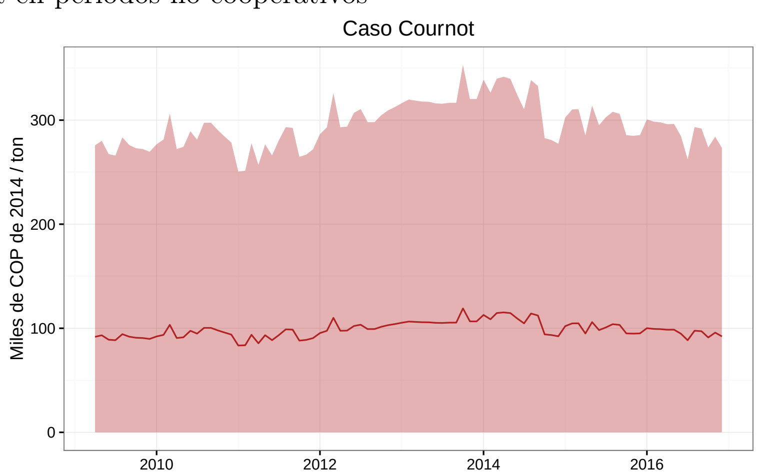


Figura 12.3: Precio de mercado frente a costo marginal promedio estimado asumiendo competencia a la Cournot en periodos no cooperativos

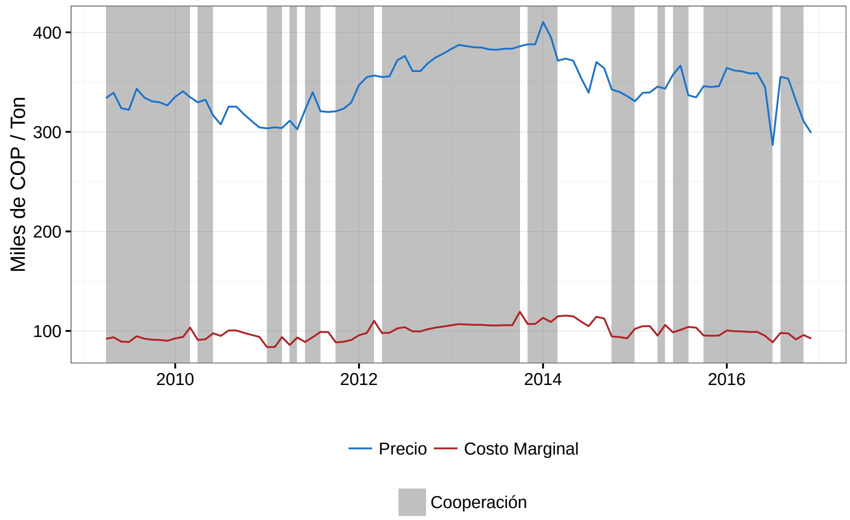
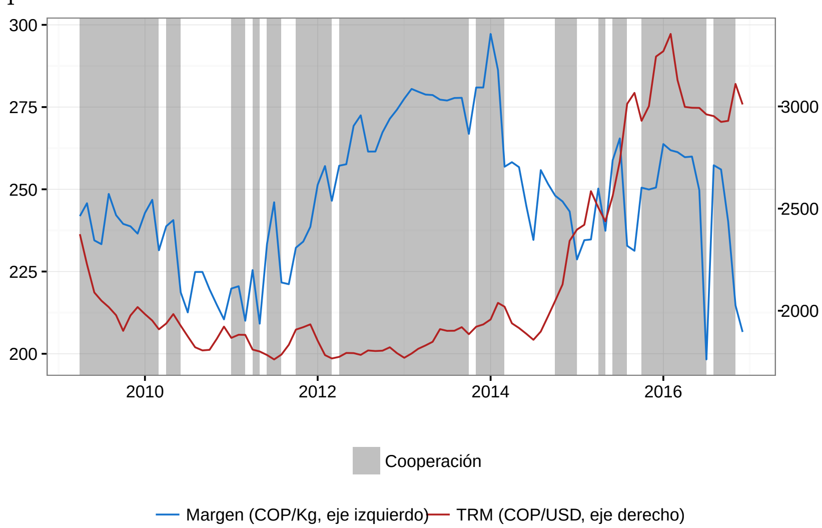


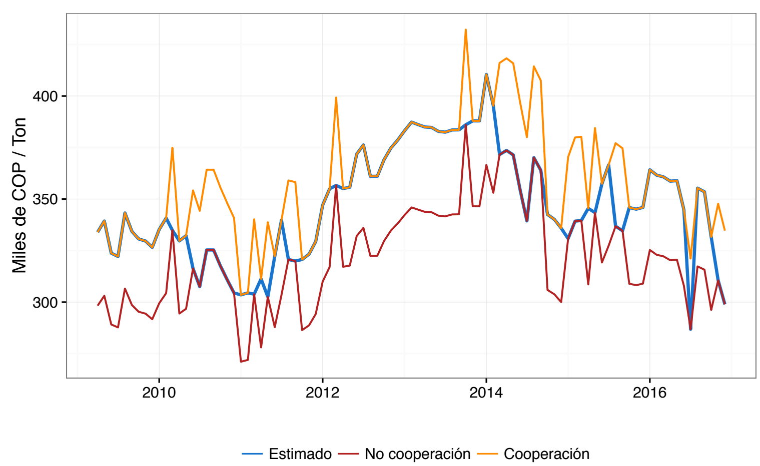
Figura 12.4: Evolución del margen precio-costo promedio estimado frente a TRM promedio mensual, asumiendo competencia a la Cournot en periodos no cooperativos



Por otra parte, el valor estimado para la probabilidad de cooperación, $\hat{\lambda} =$ 0,64, implica que existe una alta probabilidad de que las firmas productoras puedan coordinar precios en ciertos periodos de auge. No obstante, como se mencionó anteriormente, aunque sean frecuentes los periodos de coordinación, los valores estimados de θ_c sugieren que estos posibles acuerdos no generan un impacto substancial en los precios y cantidades del mercado.

De acuerdo con lo anterior, en la Figura 12.5 se ilustra el precio de mercado observado en paralelo con el precio calculado para dos escenarios: asumiendo que nunca hubo cooperación y asumiendo que el hubo adhesión al cartel ejerciendo el poder de mercado implícito por $\hat{\theta}_c = 0{,}32$. Como se puede observar, la diferencia entre los precios para ambos escenarios contractuales no supera los 50 COP.

Figura 12.5: Precio observado frente a contrafactual competitivo y de adhesión a cartel, asumiendo competencia a la Cournot en periodos no cooperativos



Bibliografía

Bar-Eli, M., Azar, O. H., Ritov, I., Keidar-Levin, Y., and Schein, G. (2007). Action bias among elite soccer goalkeepers: The case of penalty kicks. *Journal of economic psychology*, 28(5):606–621.

Brams, S. J. (1987). Superior beings. if they exist how would we know? *Studia Logica*, 46(2):205–206.

Green, E. J. and Porter, R. H. (1984). Noncooperative collusion under imperfect price information. *Econometrica*, 52(1):87–100.

Kiefer, N. M. (1980). A note on switching regressions and logistic discrimination. *Econometrica*, 48(4):1065–1069.

Krishna, V. (2009). *Auction Thoery*. Academic Press.

Nevo, A. (1998). Identification of the oligopoly solution concept in a differentiated-products industry. *Economics Letters*, 59(3):391–395.

Osborne, M. J. and Rubinstein, A. (1994). *A course in game theory*. The MIT Press, Cambridge, USA. electronic edition.

Palacios-Huerta, I. (2003). Professionals play minimax. *The Review of Economic Studies*, 70(2):395–415.

Porter, R. H. (1983a). A study of cartel stability: The joint executive committee, 1880-1886. *The Bell Journal of Economics*, 14(2):301–314.

Porter, R. H. (1983b). A study of cartel stability: The joint executive committee, 1880-1886. *The Bell Journal of Economics*, 14(2):301–314.

Shubik, M. (1986). Game theory in the social sciences : Martin Shubik, Boston & London: Massachusetts Institute of Technology Press, 1984, 514 pages, 17,50. $MathematicalSocialSciences$, 12(1) : 101 − −101.

Vega-Redondo, F. (2003). *Economics and the Theory of Games*. Cambridge University Press.

von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1947). *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press.